АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ»

**В.С. Варзаков, Е.Н. Надеждин**

# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

**Учебное пособие**

Тула - 2011

УДК 336: 51(075.8)
ББК 65.26в 631я73
В 18

**Варзаков В.С., Надеждин Е.Н.**
**Финансовая математика:** учеб. пособие.- Тула: Автономная некоммерческая организация ВПО «Институт экономики и управления», 2011. – 95 с.

ISBN 978-5-7679-2120-1

Изложен понятийный аппарат и методы выполнения финансовых расчётов.

Учебное пособие соответствует рабочей учебной программе по дисциплине «Финансовая математика» и отвечает требованиям ФГОС высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100.62 «Экономика»: профили «Финансы и кредит» и «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей очной и заочной форм обучения.

***Рецензенты:*** Заведующий кафедрой экономики, менеджмента и маркетинга Тульского филиала ВЗФЭИ доктор экономических наук, доцент **В.А. Поляков**;

заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии ФГБОУ «Тульский государственный педагогический университет» доктор физ.-мат. наук, профессор **Н.М. Добровольский**.

ISBN 978-5-7679-2120-1

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Список основных обозначений

| | |
|---|---|
| $I$ | - проценты за весь срок ссуды; |
| $P$ | - первоначальная сумма долга; |
| $S$ | - наращённая сумма, сумма в конце срока; |
| $i$ | - ставка наращения процентов (десятичная дробь); |
| $n$ | - срок ссуды; |
| $j$ | - сложная учётная ставка; |
| $d$ | - сложная эффективная (реальная) учетная процентная ставка; |
| $A$ | - современная величина (сумма современных величин всех платежей потока); |
| $\delta$ | - постоянная сила роста; |
| $\delta_t$ | - переменная сила роста; |
| $R$ | - величина платежа (члена потока) для потока платежей |
| $H$ | - темп инфляции; |
| $i_p$ | - среднегодовой темп роста цен; |
| $h$ | - среднегодовой темп инфляции; |
| $J_c$ | - индекс покупательной способности денег (при учете инфляции) |

# ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Финансовая математика» предназначена для реализации программы подготовки специалистов, областью профессиональной деятельности которых является работа в финансовых организациях: банках, биржах, финансовых и страховых компаниях, инвестиционных фондах, Министерстве финансов Российской Федерации, экономических службах предприятий и организаций всех форм собственности на должностях, требующих высшего финансово-экономического образования.

Целью изучения финансовой математики является ознакомление с её основными понятиями, положениями и методами, получение навыков выполнения финансовых расчетов.

Основными задачами в *курсе финансовой математики являются освоение методов финансовых расчетов и приложениями этих методов*.

Знания, приобретенные при изучении курса, должны помочь специалистам в математическом моделировании и анализе экономических явлений.

Содержание программы дисциплины и методика её преподавания базируются на положениях Федерального Государственного образовательного стандарта ВПО. Данная дисциплина должна сформировать у студентов современную теоретическую базу знаний и аналитических подходов (финансовых расчетов) к постоянно изменяющейся экономической обстановке.

Предметом изучения дисциплины «Финансовая математика» является комплекс проблем, связанных с выполнением финансовых расчетов в современных экономических системах.

Дисциплина «Финансовая математика» изучает процессы:

- начисления простых процентов;
- начисления сложных процентов;
- анализа финансовых потоков;
- расчета по кредитным операциям, ссудам, займам;
- расчета платежей в производственной деятельности;
- расчета платежей в условиях риска и неопределенности.

Дисциплине «Финансовая математика» *справедливо отведена роль фундамента при освоении студентом других курсов*. Знания, полученные будущими специалистами при изучении данной дисциплины, должны стать основой при осуществлении ими профессиональной деятельности в областях:

- организации деятельности внебюджетных фондов;
- планирования, учета и отчетности на предприятиях, в организациях, учреждениях;
- организации и управления денежными потоками предприятий;
- инвестиционной деятельности хозяйствующих субъектов;
- организации финансов предприятий и организаций;
- банковского и страхового дела.

Дисциплина «Финансовая математика» изучается студентами специальностей «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» на третьем курсе.

Дисциплина «Финансовая математика» входит в состав федерального компонента профессиональных дисциплин направления бакалавриата «Экономика» и является обязательной для изучения.

Студентам для освоения дисциплины «Финансовая математика» требуются знания по следующим дисциплинам:

1. Математика; 2. Теория вероятностей и математическая статистика.

Студентами, изучившими дисциплину «Финансовая математика», приобретаются знания, необходимые для освоения следующих дисциплин:

1. Экономика организаций (предприятий);
2. Мировая экономика;
3. Экономический анализ;
4. Финансы и кредит;
5. Деньги, кредит, банки.

Дисциплина «Финансовая математика» тесно взаимосвязана с другими образовательными компонентами подготовки бакалавров направления «Экономика», а именно дисциплинами: финансы; деньги, кредит, банки; финансы организаций; финансовый менеджмент; налоги и налогообложение; страхование; бюджетная система Российской Федерации; рынок ценных бумаг; инвестиции; оценка и анализ рисков. Взаимосвязи проявляются в том, что каждая из дисциплин с разных точек зрения исследует экономическую жизнь общества, проблемы развития финансово-кредитной системы страны.

В учебном пособии систематически изложен материал, отвечающий базовым дидактическим единицам рабочей учебной программы дисциплины «Финансовая математика». Основное внимание уделяется вопросам практических приложений методов финансовой математики.

# ГЛАВА 1. СУЩНОСТЬ, ЗАДАЧИ И КАТЕГОРИИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Понятие финансовой математики и финансово-экономических расчетов как предмета статистического исследования. Роль финансово-экономических расчетов в обеспечении эффективности и оптимизации финансовой деятельности. Методологические основы финансовой математики. Место финансовой математики в системе общественных наук. Задачи финансовой математики и основные направления её совершенствования на современном этапе развития общества. Проценты, процентные деньги и процентные ставки. Фактор времени в финансовых операциях.

## 1.1 Цели и задачи изучения дисциплины «Финансовая математика»

Дисциплина «Финансовая математика» содержит систематизированное изложение основных понятий и методов финансовых вычислений и количественного анализа финансовых операций.

Содержание классического курса охватывает базовые разделы финансовой математики: расчёты по простой и сложной процентным ставкам; финансовые ренты; финансовый анализ инвестиций; финансовые расчеты по ценным бумагам.

Программа дисциплины "Финансовая математика" построена на основе современных требований ФГОС к уровню подготовки экономистов.

Необходимость дифференцированного выделения данного курса в программе подготовки бакалавров вызвана дублированием в ряде дисциплин (финансовый менеджмент, инвестиционный анализ, оценка бизнеса, рынок ценных бумаг и пр.) теоретических основ финансовых расчетов. Выделение курса "Финансовой математики" позволило акцентировать внимание на глубоком и последовательном изучении теоретических основ финансовых расчетов и формировании у студентов практических навыков в решении задач, излагаемых в смежных курсах.

*Выделим цели преподавания* курса "Финансовая математика":

- подготовка бакалавров, владеющих современным финансовым инструментарием статистической оценки и анализа рыночной экономики;
- формирование у будущих специалистов твердых теоретических знаний и практических навыков финансово-экономических расчетов, позволяющих эффективно осуществлять инвестиционную деятельность и управлять финансами.

В ходе изучения дисциплины ставятся *следующие задачи*:

- овладение основами математического аппарата современных методов количественного финансового анализа, необходимого для осуществления широкого спектра разнообразных финансово-экономических расчетов;
- применение методов моделирования и прогнозирования финансовых процессов для принятия обоснованных управленческих решений;
- освоение финансово-экономических расчетов на компьютере с использованием базовых моделей финансовых операций и выполнение прикладного количественного финансового анализа.

Принятые в учебном пособии содержание и последовательность рассмотрения учебного материала позволяют получить целостное представление о финансово-экономических расчетах и основах практического применения этих методов при разработке, обосновании и реализации финансовых решений.

Особенностью курса является раскрытие каждой темы по схеме:

- экономическая сущность задачи и необходимые понятия;
- математические формулировка задачи;
- решение практических задач с выполнением аналитических расчётов.

Эффективное изучение дисциплины предполагает знание основ математики, экономической теории, статистики и финансов. Полученные студентами знания по финансовой математике являются основой для дальнейшего изучения ими дисциплин "Финансовый менеджмент", "Финансово-инвестиционный анализ", "Анализ рынка ценных бумаг", "Биржевое дело", "Страхование" и т. п.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

**з н а т ь:**

- простые и сложные проценты как основу операций, связанных с наращением или дисконтированием платежей;
- принцип эквивалентности ставок как основу многих методов количественного анализа;
- методы расчета обобщающих характеристик потоков платежей применительно к различным видам финансовых рент;

**уметь:**

- производить наращение по простым и сложным процентам;
- осуществлять дисконтирование и учет по простым и сложным ставкам процентов;
- оценивать последствия замены одного финансового обязательства другим и делать аргументированные выводы;
- планировать и оценивать эффективность финансово-кредитных операций;
- планировать погашение долгосрочной задолженности;
- производить финансовые расчеты по ценным бумагам;
- планировать и анализировать инвестиционные проекты;
- исчислять показатели по лизинговым, факторинговым и форфейтинговым операциям;
- использовать компьютерные технологии для финансово-экономических расчетов, в частности, табличный процессор Excel, включая встроенные финансовые и статистические функции, аппарат: *Подбор параметров, Диспетчер сценариев, Таблицы подстановки, деловую графику*;

**иметь представление:**

- об использование компьютерной техники для финансово-экономических расчетов;
- о практическом применении финансово-экономических расчетов в банках, финансовых отделах производственных и коммерческих организаций, в

инвестиционных подразделениях страховых учреждений и пенсионных фондов и т. д.

**Тематический план изучения дисциплины**

| № п/п | Название разделов и тем, форма контроля | Полный срок освоения | | | | | Ускоренный срок освоения | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Всего (часов) | В том числе | | | | Всего (часов) | В том числе | | | |
| | | | Аудиторные занятия | | | Самостоятельная работа студентов | | Аудиторные занятия | | | Самостоятельная работа студентов |
| | | | лекции | практические занятия | контроль самостоятельной работы | | | лекции | практические занятия | контроль самостоятельной работы | |
| 1 | Предмет изучения финансовой математики. Содержание курса | **15** | 1 | | | 14 | **16,5** | 0,5 | | | 16 |
| 2 | Начисление простых процентов | 17 | 1 | 1 | | 15 | 18 | 1 | 1 | | 16 |
| 3 | Начисление сложных процентов | 18 | 1 | 1 | 1 | 15 | 18 | 1 | 1 | | 16 |
| 4 | Потоки платежей | **19** | 3 | **1** | | 15 | **18** | 1 | **1** | | 16 |
| 5 | Кредитные операции | 17,5 | 2 | 0,5 | | 15 | 18 | 1 | 1 | | 16 |
| 6 | Потоки платежей в производственной деятельности | 17,5 | 2 | 0,5 | | 15 | 18 | 1 | 1 | | 16 |
| 7 | Потоки платежей в условиях риска и неопределенности | 21 | 2 | 0 | 1 | 18 | 18,5 | 0,5 | 0 | 1 | 17 |
| | Итого по дисциплине | 125 | 12 | 4 | 2 | 107 | 125 | 6 | 5 | 1 | 113 |

## 1.2 Финансовая математика как основа количественного анализа финансовых операций

**Предмет** финансовой математики (ФМ) составляют проверенные практикой методы количественного финансового анализа.

Количественный финансовый анализ предназначен для решения разнообразных прикладных задач, возникающих в процессе экономической деятельности. Эти задачи можно разделить на две большие группы: *традиционные* (классические) и *нетрадиционные*, постановка и интенсивная разработка которых наблюдается в последние 30 лет.

Рамки ФМ достаточно широки – от элементарных начислений процентов до относительно сложных расчётов, например, оценки влияния различных факторов на эффективность выпуска облигаций или методов сокращения риска путём диверсификации портфеля финансовых инвестиций.

Основные задачи финансовой математики:

- измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракта) для каждой из участвующих сторон;
- разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения финансовой задолженности;
- измерение зависимости конечных результатов операции от её основных параметров;
- определение допустимых критических значений этих параметров и расчёт параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции;
- оптимизация по какому-либо критерию портфеля задолженности.

Выделим основные направления совершенствования ФМ на современном этапе социально-экономического развития общества:

- постановка новых задач в области инвестиционного анализа;
- создание методов расчётов для многокритериальной оценки инвестиций;
- применение сетевых форм сбора и обработки данных;
- создание информационных систем для банковской деятельности;
- разработка и внедрение специализированных пакетов прикладных программ (ППП).

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Дело в том, что даже в условиях отсутствия инфляции и риска 1 млн. руб., полученных через год, не равноценен этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы в свою очередь могут быть реинвестированы и т. д. Следовательно, сегодняшние деньги в этом смысле ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения - например, в бухучете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Необходимость учёта фактора времени в финансовых операциях вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в принципе неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Иными словами, учёт фактора времени обусловлен *принципом* изменения ценности денег во времени.

Неравноценность двух одинаковых по абсолютной величине разновременных сумм связана, прежде всего, с тем, что имеющиеся сегодня деньги могут быть инвестированы и принести доход в будущем. Влияние фактора времени многократно усиливается в период инфляции.

Следствием принципа изменения ценности денег во времени является неправомерность суммирования денежных средств, относящихся к разным моментам времени, при принятии решений финансового порядка. Неправомерно также и непосредственное сравнение разновременных денежных величин. Их сравнение допустимо только при «приведении» таких сумм к одному моменту времени.

Важным в финансовом анализе является *принцип финансовой эквивалентности*. Под последним понимается равенство (эквивалентность) финансовых обязательств сторон, участвующих в операции. Согласно указанному принципу можно изменять уровень процентных ставок, их вид, сроки исполнения обязательств, распределение платежей во времени т. д. в рамках одной операции, не нарушая взаимной ответственности.

Оба принципа не могут быть реализованы без того или иного способа наращения процентов или дисконтирования с применением какого-либо вида процентной ставки.

### 1.3 Проценты, виды процентных ставок

*«Процент есть цена, которую люди платят за то, чтобы получить ресурсы сейчас, вместо того, чтобы ждать до тех пор, пока они заработают деньги, на которые эти ресурсы можно купить ...»*

Пол Хейне

Под *процентными деньгами* или, кратко, *процентами* в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещении денег на сберегательный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

В какой бы форме не выступали проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере процентной ставки - отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют периодом начисления. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или даже 1/32.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т. е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени (дискретные проценты), причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять непрерывные проценты.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют наращением или ростом первоначальной суммы.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле - как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой операции или коммерческо-хозяйственной деятельности.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются простыми, а во втором - сложными процентными ставками.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть постоянными или переменными («плавающими»). Плавающие ставки часто применяются во внешнеэкономических операциях. В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней (маржи). Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR - London interbank offered rate) или московская межбанковская ставка МИБОР. Размер маржи определяется целым рядом условий (сроком операции и т.д.). Судя по мировой практике, он обычно находится в пределах 0,5-5,0 %. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Теперь мы рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

***Ставкой (нормой) процента*** или просто процентом называется отношение, выраженное в процентах, дохода на капитал к размеру этого капитала.

Исторически проценты взимались за год – естественный природный, и, следовательно, естественный экономический цикл. В Древней Греции брали от 10 до 36 % в год, по данным «Русской Правды» деньги давали в рост под 40 % годовых.

В различных договорах, как правило, упоминаются проценты годовых. Прочие проценты вычисляются на основе процента годовых, исходя из формул в соответствии с экономической традицией. Процентные ставки за другие периоды времени (периоды начисления) определяются пересчётом годовой ставки. Например, по умолчанию в банках 20% годовых означает 5% в квартал. Проценты задаются с точностью до сотых долей в десятичных дробях или до 1/32 – в натуральных дробях. Начисление процентов отражает объективный процесс в экономике. В прежние времена ростовщичество осуждалось религией. Даже Аристотель считал несправедливым начисление процентов за пользование ссудой. В исламских странах начисление процентов явном виде до сих пор под запретом. Однако, напомним, что экономические законы не зависят от желаний людей.

Рассмотрим виды процентных ставок и способы начисления процентов.

Для начисления процентов применяют постоянную базу или последовательно изменяющуюся базу. За **базу** принимается сумма, полученная на предыдущем этапе наращения или дисконтирования. В первом случае используют простые, во втором – сложные процентные ставки, при применении которых проценты начисляются на проценты.

Существует два принципа расчёта процентных денег: от настоящего к будущему и, наоборот, от будущего к настоящему. Соответственно применяют ставки наращения и дисконтные, или учётные, ставки. Проценты, полученные по ставке наращения, называют *декурсивными*, по учётной ставке - *антисипативными.*

Процентные ставки могут быть фиксированными (в контракте указываются их размеры) или плавающими. В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени база (базовая ставка) и размер надбавки к ней - *маржи*. Размер маржи определяется радом условий, в частности, финансовым положением заёмщика, сроком кредита и т.д. Он может быть постоянным на протяжении срока ссудной операции или переменным.

Важное место в системе процентных ставок занимает ставка рефинансирования Центрального банка (ЦБ) России – ставка, по которой он выдаёт кредиты коммерческим банкам.

Добавим, что при последовательном погашении задолженности возможны 2 способа начисления процентов. Согласно первому процентная ставка (простая или сложная) применяется к фактической сумме долга. По второму способу простые проценты начисляются сразу на первоначальную сумму долга без учёта последовательности его погашения. Последний способ применяется в потребительском кредите и в некоторых других (относительно редких) случаях.
В практических расчётах применяют так называемые *дискретные проценты*, т.е. проценты, начисляемые за фиксированный интервалы времени (год, полугодие и т. д.) Иначе говоря, время рассматривается как дискретная переменная. В некоторых случаях возникает необходимость в применении непрерывных процессов, когда наращение или дисконтирование производится непрерывно. В подобных ситуациях применяют специальные непрерывные процентные ставки.

**Контрольные вопросы**

1. В чём заключается предмет финансовой математики?
2. Как можно объяснить возрастающую роль финансовой математики в развитии экономических отношений?
3. В чём заключается принцип финансовой эквивалентности?
4. В чём проявляется влияние фактора времени в финансовых операциях?
5. Покажите, в чём отличие процентов от процентной ставки?

# ГЛАВА 2. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

Формула наращения. Погашение задолженности частями. Наращение процентов в потребительском кредите. Дисконтирование по простым процентным ставкам. Наращение по учётной ставке. Прямые и обратные задачи при начислении процентов и дисконтировании по простым ставкам. Определение срока ссуды и величины процентной ставки. Конверсия валюты и наращение процентов.

## 2.1 Формула наращения процентов и её приложения

Под ***наращенной суммой*** ссуды (долга, депозита, других видов выданных в долг или инвестированных денег) понимают первоначальную её сумму с начисленными процентами к концу срока начисления. Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы долга на множитель наращения, который показывает, во сколько раз наращённая сумма больше первоначальной. Расчётная формула зависит от вида процентной ставки и условий наращения.

К наращению по простым процентам обычно прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до 1 года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются. Для записи формулы наращения простых процентов примем обозначения:

$I$ - проценты за весь срок ссуды;

$P$ - первоначальная сумма долга;

$S$ - наращённая сумма, т.е. сумма в конце срока;

$i$ - ставка наращения процентов (десятичная дробь);

$n$ - срок ссуды.

Если срок изменяется в годах, то параметр $i$ означает годовую процентную ставку. Соответственно каждый год приносит проценты в сумме $P \cdot i$. Начисленные за весь срок проценты составят величину

$$I = P \cdot n \cdot i\ .$$

Наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P \cdot (1 + n \cdot i)\,.$$

Выражение (1.1) называют *формулой наращения по простым процентам* или кратко – формулой простых процентов, а множитель $(1 + n \cdot i)$ - *множителем наращения* простых процентов. График роста по простым процентам представлен на рис. 1.1.

Заметим, что увеличение процентной ставки или срока в k раз одинаковым образом влияет на множитель наращения. При этом множитель наращения увеличится в $(1 + k \cdot n \cdot i)/(1 + n \cdot i)$ раз.

***Пример 2.1***

Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 700 тыс. руб., срок 4 года, проценты простые по ставке 20% годовых (i=0,2):

I= 700·4·0,2=560 тыс. руб; S= 700+560 = 1260 тыс. руб.

Увеличим ставку в 2 раза. Сумма процентов при этом удвоится. Однако наращенная сумма увеличится в $(1+2 \cdot 4 \cdot 0,2) / (1 + 4 \cdot 0,2) = 1,444$ раза.

***Пример 2.2***

Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100000 руб., срок долга 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых.

$I = 100000 \cdot 1,5 \cdot 0,15 = 22500$ руб. - проценты за 1,5 года;

$S = 100000 + 22500 = 122500$ руб. - наращенная сумма.

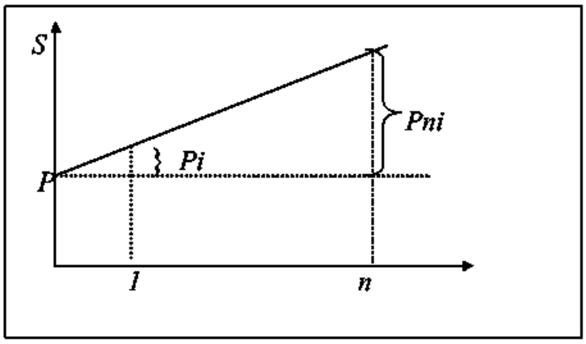


Рис. 2.1 - Наращение по простой процентной ставке

**Практика расчёта процентов для краткосрочных ссуд.** Поскольку процентная ставка, как правило, устанавливается в расчёте за год, то при сроке ссуды менее года необходимо определить, какая часть годового процента уплачивается кредитору. Аналогичная проблема возникает и в случаях, когда срок ссуды меньше периода начисления.

Выразим срок $n$ в виде дроби

$$n = t / K, \qquad (2.1)$$

где t – число дней ссуды; K – число дней в году, или временная база начисления процентов.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют обыкновенный или коммерческий процент. В отличие от него точный процент получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366. Определение числа дней пользования ссудой также может быть точным или приближенным. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором - продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день. Подсчет точного числа дней между двумя датами можно осуществить на компьютере, взяв разность этих дат, или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые в практике:

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды*. Этот вариант даёт самые точные результаты. В коммерческих документах он обозначается как 365/365 или АСТ/АСТ.

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды*. Этот вариант даёт несколько больший результат, чем применение чистых процентов. Его называют *банковским* и обозначают как 365/360 или АСТ/360.

3. *Обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды.* Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например, при промежуточных расчётах. Метод условно обозначается как 360/360.

***Пример 2.3***

Ссуда в размере 1 млн. руб. выдана 20.01.2010 г. до 05.10.2010 г. Включительно под 18 % годовых. Какую сумму должен вернуть должник в конце срока начисления простых процентов? При решении применить 3 метода. Предварительно определим число дней ссуды: точное - 258, приближённое – 255.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

   S=1 000000 · (1+ 258/365 · 0,18)= 1 127 233 руб.

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360/365):

   S=1 000000·(1+ 258/360 · 0,18)= 1 129 000 руб.

3. Обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды (360/360):

   S=1 000000 ·(1+ 255/360 · 0,18)= 1 127 500 руб.

Если общий срок ссуды охватывает два смежных календарных года и есть необходимость в распределении суммы процентов между ними (например, при определении годовых сумм дохода и т.д.), то общая сумма начисленных простых процентов в каждом году составит:

$$I= I_1+I_2 = P n_1 i + P\ n_2 i\ , \qquad (2.2)$$

где $n_1$ и $n_2$ - части срока ссуды, приходящиеся на каждый календарный год.

**Простые переменные ставки**

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки**.** Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S = P\cdot(1+n_1\cdot i_1+n_2\cdot i_2+...+n_m\cdot i_m) = P\cdot(1+\sum_t n_t\cdot i_t)\ , \qquad (2.3)$$

где $i_t$ - ставка простых процентов в периоде $t$, $n_t$ - продолжительность периода с постоянной ставкой, $n=\sum_t n_t$ .

***Пример 2.4***

Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 16 %, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1 %. Необходимо определить множитель наращения за 2,5 года.

Находим:

$$(1+\sum_t n_t \cdot i_t) = (1 + 1 \cdot 0{,}16\ +\ 0{,}5 \cdot 0{,}17\ +\ 0{,}5 \cdot 0{,}18\ +\ 0{,}5 \cdot 0{,}19\ ) = 1{,}43\ .$$

***Пример 2.5***

Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращения за весь срок договора

$$(1+\sum_t n_t \cdot i_t) = 1 + 0{,}25\ \cdot 0{,}1 + 0{,}25\ \cdot 0{,}09\ +\ 0{,}25\ \cdot 0{,}08\ +\ 0{,}25\ \cdot 0{,}07\ = 1{,}085\ .$$

**Начисление процентов при изменении сумм депозита во времени**

Принципиально ничего не меняется, если сумма, на которую начисляются проценты, изменяют свою величину во времени (размер вклада на сберегательном счёте текущий счёт при периодическом его пополнении или снятии денег и т. п.). В этом случае имеем

$$I = \sum_j R_j \cdot n_j \cdot i\,, \tag{2.4}$$

где $R_j$- остаток средств на счёте в момент j после очередного поступления или списания средств; $n_j$ – срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счёте.

В банковско-сберегательном деле обычно применяют следующий способ, основанный на преобразовании (2.4). Для этого измерим интервалы между моментами измерений величины остатка на счете в днях, а процентную ставку выразим в процентах (а не в десятичных дробях как выше). После чего получим

$$I = \sum_j R_j \cdot n_j \cdot i = \frac{\sum R_j \cdot t_j}{100} : \frac{K}{i}. \tag{2.5}$$

Как и ранее $K$ означает число дней в году, а $t_j$ - срок в днях между последовательными изменениями остатков на счёте. Величину $\frac{\sum R_j \cdot t_j}{100}$ называют *процентным числом*, а делитель – *процентным* (или постоянным) *делителем*.

***Пример 2.6***

Движение средств на счёте характеризуется следующими данными:
05.02 поступило 12 млн. руб., 10.07 снято 4 млн. руб. и 20.10 поступило 8 млн. руб.

Найти сумму на счёте на конец года. Процентная ставка 18 % годовых. Процентный делитель составит 365:18=20,27778. Расчёт суммы процентных чисел приведён в таблице.

| Дата | Движение средств | Остаток $R_j$ | Срок $t_j$ | Процентное число |
|---|---|---|---|---|
| 05.02 | 12 | 12 | 155 | 18,6 |
| 10.07 | -4 | 8 | 102 | 8,16 |
| 20.10 | 8 | 16 | 72 | 11,52 |
| 31.2 | - | 16 | - | - |
| **Итого** | | | | 38,28 |

Сумма процентов за весь срок равна 38,28/20,27778=1,888 млн. руб.

## 2.2 Прямые и обратные задачи при начислении процентов и дисконтировании по простым ставкам

**Простые переменные ставки.** Как известно, процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \ldots) = P \cdot (1 + \sum n_t \cdot i_t). \qquad (2.6)$$

где $P$ – первоначальная сумма (ссуда);

$i_t$ – ставка простых процентов в периоде с номером $t$;

$n_t$ – продолжительность периода $t$ – периода начисления по ставке $i_t$.

***Пример 2.7***

Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий на 1% меньше, чем в предыдущий.

Определим множитель наращения за весь срок договора.

$$1 + \Sigma n_t i_t = 1 + 0,25 \bullet 0,10 + 0,25 \bullet 0,09 + 025 \bullet 0,08 + 0,25 \bullet 0,07 = 1,085.$$

**Реинвестирование по простым процентам**

Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована, хотя, скорее всего, и под другую процентную ставку, и этот процесс реинвестирования иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока $N$. Тогда в случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока $N$ вычисляется по формуле

$$S = P \cdot (1 + n_1 i_1) \cdot (1 + n_2 i_2) \cdot \ldots \cdot = P \cdot \prod_{t=1}^{m} (1 + n_t i_t), \qquad (2.7)$$

*где* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ – продолжительности последовательных периодов реинвестирования,

$$N = \sum_{t=1}^{m} n_t \,, \qquad (2.8)$$

$i_1, i_2, \ldots, i_m$ – ставки, по которым производится реинвестирование.

### Дисконтирование и учет по простым ставкам

На практике часто приходится решать задачу обратную наращению процентов, когда по заданной сумме $S$, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму $P$. Расчет $P$ по $S$ называется дисконтированием суммы $S$. Величину $P$, найденную дисконтированием, называют ***современной величиной (текущей стоимостью)*** суммы $S$. Проценты в виде разности $D=S-P$ называются ***дисконтом*** или ***скидкой***. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют ***учетом***. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины. Таким образом, в практике используются два принципа расчета процентов: 1) путем наращения суммы ссуды и 2) через скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина $P$ эквивалентна сумме $S$ в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращения станет равной $S$. Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие приведения шире, чем дисконтирование. ***Приведение*** – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение. Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

### Математическое дисконтирование

Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче $S=P(1+ni)$, то в обратной задаче имеем

$$P = S\frac{1}{1+ni} \qquad (2.9)$$

Дробь в правой части равенства при величине $S$ называется ***дисконтным множителем***. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы $S$ равен $D=S-P$.

### Банковский или коммерческий учет

Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется ***учетная ставка***, которую мы обозначим символом $d$. По определению, простая годовая учетная ставка находится как

$$d = \frac{S - P}{Sn} \qquad (2.10)$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен $D = S \cdot n \cdot d$, откуда

$$P=S-D=S-Snd=S(1-nd)$$

Множитель $(1-nd)$ называется дисконтным множителем. Срок $n$ измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

**Наращение по учетной ставке**

Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета $S$ по $P$. В этом случае из формулы (2.10) следует, что

$$S = P\frac{1}{1-nd} \qquad (2.11)$$

**Сравнение ставки наращения и учетной ставки**

Операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае, в зависимости от применяемой ставки, можно различать прямую и обратную задачи.

Прямая и обратная задачи

| Ставка | Прямая задача | Обратная задача |
|---|---|---|
| наращения $I$ | наращение: $S=P(1+ni)$ | Дисконтирование: $P=S/(1+ni)$ |
| учетная $d$ | дисконтирование: $P=S(1-nd)$ | Наращение: $S=P/(1-nd)$ |

**Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке**

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи:

1) определить конечную сумму долга на момент его погашения;

2) рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2=P_1(1+n_1i)(1-n_2d),$$

где $P_1$ - первоначальная сумма ссуды;

$P_2$ - сумма, получаемая при учёте обязательства;

$n_1$ - общий срок платёжного обязательства, в течение которого начисляются проценты;

$n_2$ - срок от момента учёта до погашения долга.

***Пример 2.8***

Платежное обязательство уплатить через 100 дней 2 млн. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов $i$=20% годовых, было учтено за 40 дней до срока погашения по учетной ставке $d$=15%. Требуется определить сумму, получаемую при учете.

***Решение***

$$P_2 = 2(1+\frac{100}{365}0{,}2)(1-\frac{40}{360}0{,}15) = 2{,}074 \text{ млн. руб.}$$

Отметим, что при наращении здесь использовалась временная база 365 дней, а при дисконтировании – 360.

**Определение продолжительности ссуды**

Иногда задача ставится таким образом, что требуется найти временной интервал, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величины. Другими словами, речь идет о решении формул (1) и (10) относительно $n$.

При использовании простой ставки наращения $i$ из (2.1) получаем

$$n = \frac{S-P}{P \cdot i}, \qquad (2.12)$$

а при учетной ставке $d$ из (10) имеем

$$n = \frac{S-P}{S \cdot d}. \qquad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) определяют срок, измеряемый в годах, но простые ставки в основном используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях выражается как

$$t = n \cdot K, \qquad (2.14)$$

где $K$ - временная база.

**Определение уровня процентной ставки.** Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из приведённых формул (2.1) и (2.10) получаем ставку наращения *i* и учетную ставку *d*

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n} = \frac{S-P}{P \cdot t} \cdot K, \qquad d = \frac{S-P}{S \cdot n} = \frac{S-P}{S \cdot n} \cdot K, \qquad (2.15);\ (2.16)$$

где использовалось соотношение (2.14). Напомним, что срок $n$ в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае - это весь срок операции, а во втором случае – оставшийся срок до погашения.

***Пример 2.9***

Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн. руб. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов $i$ и учетной ставки $d$. Временную базу принять равной $K$=360 дней.

***Решение***

$$i = \frac{S-P}{Pt}K = \frac{2{,}5-2}{2 \cdot 100}360 = 0{,}9,\ \text{т.е. } 90\%, \qquad d = \frac{S-P}{St}K = \frac{2{,}5-2}{2{,}5 \cdot 100}360 = 0{,}72,\ \text{т.е. } 72\%.$$

Иногда размер дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Получим формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть $S$ – размер погасительного платежа, $d_n$ – доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды $n$. Требуется определить, каким уровням годовых ставок $i$ и $d$ эквивалентны такие условия.

Итак, $S$ – сумма возврата в конце срока ссуды, $P=S(1-dn)$ – реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора.

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n} = \frac{S - S \cdot (1-d_n)}{S \cdot (1-d_n) \cdot n} = \frac{d_n}{(1-d_n) \cdot n}, \qquad (2.17)$$

$$d = \frac{S-P}{S \cdot n} = \frac{S - S \cdot (1-d_n)}{S \cdot n} = \frac{d_n}{n}. \qquad (2.18)$$

***Пример 2.10***

Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. *Требуется* определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки $d$ и годовой ставки простых процентов $i$. Считать временную базу $K$ равной 365 дням.

***Решение***

$$d = \frac{d_n}{n} = \frac{0{,}25}{200/365} = 0{,}45625, \quad т.е. \quad 45{,}625\ \%,$$

$$i = \frac{d_n}{(1-d_n)\cdot n} = \frac{0,25}{(1-0,25)\cdot 200/365} = 0,60833, \text{ т. е. } \quad 60,833\ \%.$$

### 2.3 Определение срока ссуды и величины процентной ставки

#### А) Срок ссуды

При разработке условий контрактов или их анализе возникает необходимость в решении ряда задач, которые заключаются в определении срока ссуды и размера процентной ставки при заданных условиях.

Необходимые для расчёта продолжительности ссуды $n$ в годах и днях формулы получим из формул (2.1) и (2.12)

**срок в годах**:
$$n = \frac{S-P}{P\cdot i} = \frac{S/P-1}{i}, \qquad (2.19,\ а)$$

$$n = \frac{S-P}{S\cdot d} = \frac{1-P/S}{d}. \qquad (2.19,б)$$

**срок в днях** (пусть $n = t/K$, где $K$ - временная база)**:**

$$t = \frac{S-P}{P\cdot i}\cdot K, \quad t = \frac{S-P}{S\cdot d}\cdot K, \qquad (2.20)$$

***Пример 2.12:***

Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 100 тыс. руб., вырос до 120 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25 % годовых (АСТ/АСТ)? По формуле (2.16) находим

$$t = \frac{S-P}{P\cdot i}\cdot K = \frac{120-100}{100\cdot 0,25}\cdot 365 = 292 \text{ дня.}$$

#### Б) Величина процентной ставки

Необходимость в расчёте процентной ставки возникает при определении финансовой эффективности операции и при сравнении контрактов по их доходности в случаях, когда процентные ставки в явном виде не указаны. Решив формулы (2.1) и (2.12) относительно $i$ и $d$, получим исходные формулы для сроков, измеренные в годах и днях:

$$i = \frac{S-P}{P\cdot t}\cdot K, \qquad d = \frac{S-P}{S\cdot t}\cdot K. \qquad (2.21)$$

***Пример 2.13:***

В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 110 тыс. руб. через 120 дней. Первоначальная сумма долга составила 90 тыс. руб. (ACT/360). Необходимо определить доходность ссудной операции для кредитора в виде ставки процента и учётной ставки.

***Решение:***

$$i = \frac{S-P}{P \cdot t} \cdot K = \frac{110-90}{90 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}666(6) \ \textit{или} \ \ 66{,}7\%,$$

$$d = \frac{S-P}{S \cdot t} \cdot K = \frac{110-90}{110 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}5454 \ \textit{или} \ \ 54{,}54\%.$$

В некоторых случаях размер дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Но нетрудно вывести формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть S - размер погасительного платежа, $d_n$ - доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды п. Требуется определить, каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия.

Пусть S - сумма возврата в конце срока ссуды, P=S(l-d’) - реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора. Тогда

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-S(1-d_n)}{S(1-d_n)n} = \frac{d_n}{(1-d_n)n}, \tag{2.22}$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-S(1-d_n)}{Sn} = \frac{d_n}{n}. \tag{2.23}$$

***Пример 2.14***

Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i. Считать временную базу К, равной 365 дням.

***Решение***

$$d = \frac{d_n}{n} = \frac{0{,}25}{200/365} = 0{,}45625, \text{ т.е. } 45{,}625\%,$$

$$i = \frac{d_n}{(1-d_n)n} = \frac{0{,}25}{(1-0{,}25)200/365} = 0{,}60833, \text{ т.е. } 60{,}833\%.$$

## 2.4 Конверсия валюты и наращение процентов

В финансовой практике большая группа прикладных задач связана с совмещением операций конверсии (обмена) валюты и наращения процентов.

Напомним, что под ***валютой*** в общем случае понимают денежные знаки иностранных государств (*банкноты, казначейские билеты, монеты и т. п.*), кредитные и платёжные документы (*векселя, чеки и др.*), выраженные в иностранных денежных средствах и используемые в международных экономических расчётах.

При возможности обмена рублёвых средств на СКВ и обратной конверсии целесообразно сравнить доходы от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты и опосредованно через другую валюту. Сказанное относится и к получению дохода от СКВ при её обмене на рубли, депонировании и обратной конверсии.

Выделим четыре ***основных варианта*** для наращения процентов с конверсией денежных ресурсов и без неё:

1) без конверсии: $СКВ \to СКВ$;
2) с конверсией: $СКВ \to Руб. \to Руб. \to СКВ$;
3) без конверсии: $Руб. \to Руб.$;
4) с конверсией: $Руб. \to СКВ \to СКВ \to Руб.$

| *Вариант* $СКВ \to Руб. \to Руб. \to СКВ$; |
|---|

Введём обозначения:

$P_v$ - сумма депозита в СКВ; $P_r$ - сумма депозита в рублях;

$S_v$ - наращённая сумма в СКВ; $S_r$ - наращённая сумма в руб.;

$K_0$ - курс обмена в начале операции (курс СКВ в руб.);

$K_1$ - курс обмена в конце операции;

$i$ - ставка наращения для рублёвых сумм;

$j$ - ставка наращения для конкретного вида СКВ.

Операция предполагает три шага: обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и, наконец, конвертирование в исходную валюту. Конечная (наращённая) сумма в валюте определится следующим образом:

$$S_v = P_v \cdot K_0 \cdot (1 + n \cdot i) \cdot \frac{1}{K_1}. \qquad (2.24)$$

Три сомножителя в данной формуле соответствуют трём шагам решения задачи. Множитель наращения $m$ с учётом двойного конвертирования имеет вид

$$m = \frac{K_0}{K_1} \cdot (1 + n \cdot i) = \frac{1 + n \cdot i}{K_1 / K_0}. \qquad (2.25)$$

Из анализа соотношения (2.25) следует, что с ростом ставки множитель наращения линейно увеличивается, однако рост конечного курса обмена уменьшает его.

***Пример 2.15***

Пусть предполагается разместить 1000 долл. На рублёвом депозите. Курс продажи на начало срока депозита составляет 26,08 руб. за $1, курс покупки доллара в конце операции 26,5 руб. Процентные ставки: $i = 22\%$; $j = 15\%$ (360/360). Срок депозита 3 месяца.

$$S_v = 1000 \cdot \frac{26{,}08}{26{,}45} \cdot (1 + \frac{3}{12} \cdot \frac{22}{100}) = 1040{,}2 \text{ долл.}$$

В свою очередь прямое наращение исходной долларовой суммы по долларовой ставке процента даёт $S_v = 1000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) = 1037{,}5$ *долл.*

Рассмотрим вопрос об оценке доходности операции в целом. В качестве измерителя доходности за срок операции примем простую годовую ставку процента $i_Э$. Эта ставка характеризует рост суммы $P_v$ до величины $S_v$:

$$i_Э = \frac{S_v - P_v}{P_v \cdot n}.$$

Подставим в эту формулу значение $S_v$ из формулы (2.17). После преобразований получим

$$i_Э = [\frac{K_0}{K_1} \cdot (1 + n \cdot i) - 1] / n = \frac{m-1}{n}.$$

На основе данного выражения можно сделать несколько выводов (см. рис. 2.5). Введём величину, характеризующую отношение последнего и первого курсов валюты:

$$k = \frac{K_1}{K_0}.$$

С увеличением переменной $k$ эффективность операции падает. При $k = 1$ параметр $i_{Эфф} = i$, при $k > 1$ параметр $i_{Эфф} < i$ (точка на оси $k$), наконец, при самой благоприятной для владельца денег ситуации ($k < 1$) получим $i_{Эфф} > i$.

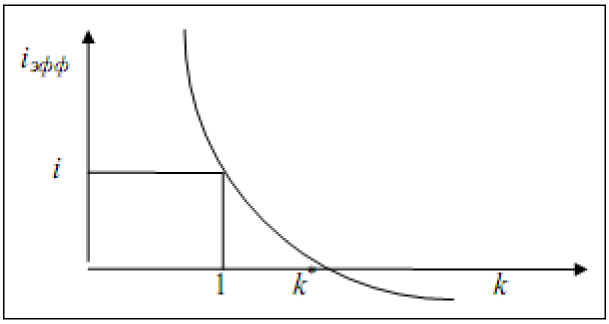


Рис.2.5

| Вариант | $Руб. \to СКВ \to СКВ \to Руб.$ |
|---|---|

Здесь трём шагам операции соответствуют три сомножителя формулы

$$S_r = \frac{P_r}{K_0} \cdot (1 + n \cdot j) \cdot K_1 = P_r \cdot (1 + n \cdot j) \cdot \frac{K_1}{K_0}. \qquad (2.26)$$

Из анализа формулы (2.26) следует:

Множитель наращения линейно зависит о ставки процента для СКВ. Зависимости этого множителя от конечного курса или его темпов роста также линейные.

***Пример 2.16***

Допустим, что необходимо разместить на валютном депозите сумму в рублях (1 млн. руб.), конвертировав её в доллары. Остальные условия возьмем из примера 2.15. Наращённая сумма в рублях к концу срока составит:

$$S_r = 1000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) \cdot \frac{26{,}45}{26{,}08} = 1052{,}2 \text{ } \textit{тыс. руб.}$$

Прямое инвестирование в рублёвый депозит даёт:

$$S_r = 1000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}22) = 1055 \text{ } \textit{тыс. руб.}$$

Осуществим анализ эффективности операции. Доходность операции определяется как

$$i_Э = \frac{S_r - P_r}{P_r \cdot n},$$

Откуда $\quad i_Э = [\frac{K_1}{K_0} \cdot (1 + n \cdot j - 1) / n = [k(1 + nj) - 1)] / n.$

Зависимость показателя эффективности от параметра $k$ носит линейный характер (рис. 2.6). При $k = 1$ имеем $i_Э = 0$.

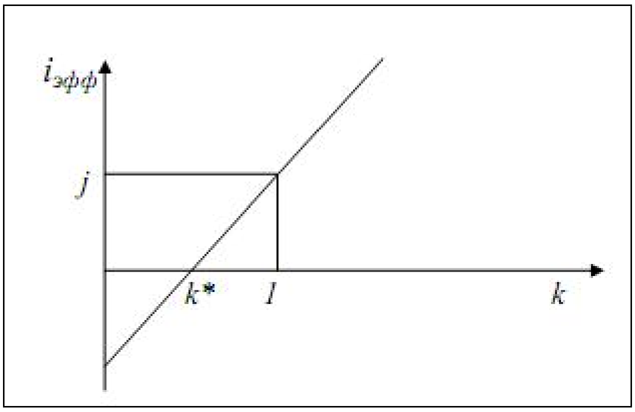


Рис.2.6

**Контрольные вопросы и задачи**

1. Раскрыть понятие «Проценты». Привести примеры.

2. Пояснить сущность *принципа финансовой эквивалентности*.

3. Показать, в чём заключается необходимость учёта при финансовых расчётах фактора времени.

4. В течение первого месяца цена товара увеличилась на **30%,** а в течение следующего месяца *новая* цена товара уменьшилась на **10%.** На сколько процентов изменилась *первоначальная* цена товара за **2** месяца?

5. В течение месяца цена товара увеличилась на ***25%,*** а в течение следующего месяца цена товара возвратилась до первоначального уровня**.** На сколько процентов уменьшилась *новая* цена товара?

6**.** Банковский вклад, не тронутый в течение года, в конце этого года увеличивается на **10%.** На сколько процентов увеличится вклад, не тронутый в течение трех лет?

7. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1000000 рублей сроком на 1 год. Банк выделил ему эту ссуду с годовой *процентной* ставкой в 15 % при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую сумму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

8. Заемщик получил ссуду в 1000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 0,75 года. Расчет производится по схеме простых процентов, причем первые 0,25 года годовая *процентная* ставка равна 12%, а в оставшееся время годовая *процентная* ставка равна 16 %. Найти сумму, возвращаемую кредитору, и процентные деньги.

9. *Простая процентная* ставка равна 6%. Какая из сумм больше: \$1500 сейчас ($t_1 = 0$) или \$1550 через 0,5 года?

# ГЛАВА 3. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Сложные проценты. Наращение по сложной процентной ставке. Наращение для ситуации, когда период определен в годах. Начисление процентов при дробном числе лет, общий и смешанный методы. Рост по сложным и простым процентам. Начисление процентов m раз в году, номинальная и эффективная ставка наращения. Наращение при переменных ставках. Дисконтирование по сложной ставке процента. Математическое дисконтирование. Банковское дисконтирование по сложной учетной ставке процентов. Наращение по учетной ставке. Номинальная и эффективная учетная ставка. Интенсивность процессов наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок. Определение срока ссуды и величины процентной ставки. Наращение процентов, полученное в результате конверсии валюты, при начислении налогов, в условиях инфляции.

## 3.1 Начисление сложных годовых процентов

Сложные проценты применяются в средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. База для начисления сложных процентов в отличие от простых не остаётся постоянной – она увеличивается с каждым шагом по времени. Абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления.

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов*.

### 3.1.1 Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна $P$, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит P(1+i), через 2 года $P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$, через $n$ лет – $S = P \cdot (1+i)^n$. Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов

$$S = P \cdot (1+i)^n. \qquad (3.1)$$

где $S$ – наращенная сумма, $i$ – годовая ставка сложных процентов, $n$ – срок ссуды (обычно в годах), $(1+i)^n$ – множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т. е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.). Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен $P$, а знаменатель $(1+i)$. Отметим, что при сроке $n<1$ наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным процентам, а при $n>1$ – наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам, (при одинаковых процентных ставках) достигается в средней части периода.

### 3.1.2 Формула наращения по сложным процентам при изменении ставки во времени

Формула (3.1) предполагает постоянную ставку на протяжении всего срока начисления процентов. Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет применять гибкую схему расчёта с помощью «плавающих» (переменных) ставок.

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, общий множитель наращения определяется как произведение частных множителей, а формула наращения принимает следующий вид

$$S = P \cdot (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (1+i_k)^{n_k}, \tag{3.2}$$

где $i_1, i_2, ..., i_k$ – последовательные значения ставок сложных процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, ..., n_k$ соответственно.

***Пример 3.1***

В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% - в третий год, 5% - в четвертый год. Определить величину множителя $I$ наращения за 4 года.

***Решение:*** $I = (1+0,3)^2 \cdot (1+0,28) \cdot (1+0,25) = 2,704.$

### 3.1.3 Формула удвоения суммы

В целях оценки своих перспектив кредитор или должник может задаться вопросом: через сколько лет сумма ссуды возрастет в $N$ раз при данной процентной ставке? Обычно это требуется при прогнозировании своих инвестиционных возможностей в будущем. Ответ получим, приравняв множитель наращения величине $N$:

а) для простых процентов

$$(1 + n \cdot i_{пр}) = \mathrm{N}, \textit{откуда получим } n = \frac{N-1}{i_{пр}}. \tag{3.3}$$

б) для сложных процентов

$$(1 + i_{слож})^{\mathrm{n}} = \mathrm{N}, \textit{ откуда получим } n = \frac{\ln N}{\ln(1+i_{слож})}. \tag{3.4}$$

На практике часто используется $N=2$. Тогда формулы (3.3) и (3.4) называются *формулами удвоения* и принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n = \frac{1}{i_{пр}}. \qquad (3.5)$$

б) для сложных процентов

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{слож})}. \qquad (3.6)$$

Если формулу (3.5) легко применять для прикидочных расчетов, то формула (3.6) требует применения калькулятора. Однако при небольших ставках процентов (скажем, менее 10%) вместо (3.6) можно использовать более простую приближенную. Её легко получить, если учесть, что $ln\ 2 \approx 0,7$, а $ln(1+i) \approx i$. Тогда получим для сложных процентов

$$n \approx 0,7 / i. \qquad (3.7)$$

***Пример 3.2***

Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 10%. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формуле. Результаты сравнить.

***Решение***

а) при простых процентах: $n = \frac{1}{i_{пр}} = \frac{1}{0,1} = 10\ лет$.

б) при сложных процентах и точной формуле

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{слож})} = \frac{0,693147}{\ln(1 + 0,1)} = \frac{0,693147}{0,09531018} = 7,27\ \ года.$$

в) при сложных процентах и приближённой формуле

$$n \approx 0,7 / i = 0,7/0,1 = 7\ лет.$$

***Выводы:***

1) одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к различным результатам.

2) при малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают близкие по значению результаты.

### 3.1.4 Начисление годовых процентов при дробном числе лет

Часто срок в годах для начисления процентов не является целым числом. Для учёта полного срока в расчётах применяют два способа.

В первом способе расчёт ведётся непосредственно по формуле (3.1). Во втором способе, который называют смешанным, начисление процентов осуществляют за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока – по формуле простых процентов:

$$S = P \cdot (1 + i)^a \cdot (1 + b \cdot i),$$

где $a + b$ - срок ссуды, $a$ - целое число лет, $b$ - дробная часть года.

Аналогичный метод применяется и в случаях, когда периодом начисления является полугодие, квартал или месяц.

При выборе метода расчёта следует иметь в виду, что множитель наращения по смешанному способу оказывается несколько больше, чем по общему, так как для $n<1$ справедливо соотношение $1+n\cdot i>(1+i)^n$. Наибольшая разница наблюдается при $b=0{,}5$.

### 3.1.5 Начисление процентов $m$ раз в году

#### Номинальная ставка процентов

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году - по полугодиям, кварталам, месяцам. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют и ежедневное начисление процентов. При начислении процентов $m$ раз в году можно воспользоваться формулой (3.1). Параметр $n$ в этих условиях будет означать число периодов начисления, а под ставкой $i$ следует понимать ставку за соответствующий период.

На практике, как правило, в контрактах фиксируется не ставка за период начисления, а годовая ставка, одновременно указывается период начисления процентов. Например, «*12% годовых с поквартальным начислением процентов*».

Пусть годовая ставка сложных процентов равна $j$, а число периодов начисления в году - $m$. Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке $j/m$. Ставка $j$ называется *номинальной*. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S=P\cdot(1+j/m)^N. \tag{3.8}$$

$N$ - общее количество периодов начисления.

Если $N$ - целое число ($N=n\cdot m$), то для определения величины множителя наращения можно воспользоваться таблицей сложных процентов (табл. 2, приложение 2). Например, при $j=20\%$ и поквартальном начислении процентов ($m=4$) в течение 5 лет находим в таблице значение множителя для данных $i=20:4=5\%$ *и* $\mathrm{n}=5\cdot4=20$, который составит $q=2{,}653298$.

#### *Пример 3.3*

Какова сумма долга через 25 месяцев, если его первоначальная величина 500 тыс. руб., проценты сложные, ставка 20% годовых, а начисление процентов поквартальное.

По условиям задачи число периодов начисления $N=25:3=8{,}333$. Применим два метода наращении – общий и смешанный. В результате получим

1) $S=500\,000\cdot(1+0{,}2/4)^{8{,}333}=750840{,}04$ руб.

2) $S=500\,000\cdot(1+0{,}2/4)^{8}\times(1+1/3+0{,}2/4)=751\,039{,}85$ руб.

**Эффективная ставка процентов**

Введём новое понятие – *действительная*, или *эффективная ставка* процента. Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Другими словами, ***эффективная ставка*** – это годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же результат, что и - разовое начисление процентов по ставке $j/m$. Обозначим эффективную ставку через $i$. По определению множители наращения по двум ставкам (эффективной и номинальной при $m$ - разовом начислении) должны быть равны друг другу:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Из равенства множителей наращения следует, что

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1. \qquad (3.8)$$

Эффективная ставка при $m>1$ больше номинальной. Замена в договоре номинальной ставки $j$ при $m$ - разовом начислении процентов на эффективную ставку $i$ не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. *Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.* Отсюда следует вывод, что разные по величине номинальные ставки оказываются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки имеют одну величину.

## 3.2 Дисконтирование по сложной ставке

Как и ранее рассмотрим математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учёт. В первом подходе задача состоит в определении величины $P$ по значению $S$ при заданной ставке процента, во втором – требуется определить $P$ при заданной учётной ставке. Применим метод математического дисконтирования и определим сумму $S$ по сложной ставке процентов. На основании (3.1) получим:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \cdot v^n, \qquad (3.9) \qquad\qquad v^n = (1+i)^{-n} = \frac{1}{q^n}. \qquad (3.10)$$

Величину $v$ называют дисконтным, учётным, или дисконтирующим, множителем. Значения этого множителя обычно табулируют.

Величину $P$, полученную дисконтированием величины $S$, называют *современной,* текущей стоимостью, или *современной величиной* $S$. Современная стоимость может быть рассчитана на любой момент до выплаты суммы $S$. Разность $S-P$, когда значение $P$ определено через дисконтирование, называют *дисконтом*. Обозначим последний через $D$: $D = S - P = S\cdot(1-v^n)$.

Современная стоимость для случаев, когда проценты начисляются $m$ раз в году, определяют по формуле

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}} = S \cdot v^{mn}, \qquad (3.11) \qquad\qquad v^{mn} = (1+\frac{j}{m})^{-mn}. \qquad (3.12)$$

***Пример 3.4:***

Сумма в 5 млн. руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить её современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12 % годовых.

Дисконтный множитель для указанных условий составит $v^5 = 1{,}12^{-5} = 0{,}56574$. Результат означает, что первоначальная сумма сократилась почти на 44%. Современная величина равна $P = 5000 \cdot 1{,}12^{-5} = 2837{,}1$ тыс. руб.

### 3.3 Операции со сложной учётной ставкой

#### 3.3.1 Учёт по сложной учётной ставке

В практике учётных операций иногда применяют сложную учётную ставку. В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как учётная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учётной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Дисконтирование по сложной учётной ставке осуществляется по формуле

$$P = S \cdot (1-d)^n. \qquad (3.13)$$

Здесь $d$ - сложная годовая учётная ставка.

***Пример 3.5:***

Долговое обязательство на сумму 5 млн. руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учётной ставке 15 % годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)?

На основании записанных формул имеем:

$P = 5000(1-0{,}15)^5 = 2218{,}5; \quad D = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5.$

Если применить простую учётную ставку того же размера, то получим:

$P = 5000(1-5 \cdot 0{,}15) = 1250; \quad D = 5000 - 1250 = 3750.$

Как следует из примера 3.5, дисконтирование по сложной учётной ставке выгоднее для должника, чем по простой учётной ставке. Основанием для этого вывода является сравнение формул для дисконтных множителей:

$w_s = (1 - n \cdot d_s)$ *и* $\mathrm{w} = (1-\mathrm{d})^{\mathrm{n}}$,

где $d_s$ и $d$ - простая и сложная учётные ставки соответственно.

Согласно первой приведённой формуле значение дисконтного множителя равномерно уменьшается по мере роста $n$ и достигает нуля при $n = d^{-1}$. Согласно второй формуле множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля в пределе $n \to \infty$.

### 3.3.2 Номинальная и эффективная учётные ставки

Дисконтирование может производиться не один , а $m$ раз в году., т.е. каждый раз учёт производится по ставке $f/m$. В этом случае имеем выражение

$$P = S \cdot (1 - \frac{f}{m})^{mn}, \qquad (3.14)$$

где $f$ - номинальная годовая учётная ставка.

Эффективная учётная ставка $d$ характеризует степень дисконтирования за год. Определим её на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = (1 - \frac{f}{m})^{mn},$$

откуда получим расчётные соотношения

$$d = 1 - (1 - \frac{f}{m})^m \qquad \text{и} \qquad f = m \cdot (1 - \sqrt[m]{1-d}).$$

Эффективная учётная ставка во всех случаях, когда $m > 1$, меньше номинальной.

***Пример 3.6***

По данным примера 3.5 определим сумму, полученную при поквартальном учёте по номинальной учётной ставке 15 % , и эффективную учётную ставку. В результате имеем $f = 0{,}15$; $m = 4$; $mn = 20$

$$P = S \cdot (1 - \frac{f}{m})^{mn} = 5000 \cdot (1 - \frac{0{,}15}{4})^{20} = 2328{,}0 \text{ тыс. руб.}$$

Эффективная учётная ставка составит

$$d = 1 - (1 - \frac{f}{m})^m = 1 - (1 - \frac{0{,}15}{4})^4 = 0{,}14177 \text{ или } 14{,}177\ \%.$$

**Наращение по сложной учётной ставке**

Иногда наращённую сумму получают и с помощью сложной учётной ставки. Из формул (3.13) и (3.14) следует, что

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}, \qquad (3.15) \qquad \text{и} \qquad S = \frac{P}{(1 - \frac{f}{m})^{mn}}, \qquad (3.16)$$

Множитель наращения при использовании сложной ставки $d$ равен $(1-d)^{-n}$.

### 3.4 Непрерывное наращение и дисконтирование. Непрерывные проценты

Непрерывное наращение имеет место в анализе сложных финансовых проблем, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании. С помощью механизма непрерывных процентов удаётся учесть сложные закономерности процесса наращения, в частности, использовать изменяющиеся по определённому закону процентные ставки.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки – *силу роста*. Сила роста характеризует относительный прирост наращённой суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

#### 3.4.1 Постоянная сила роста

Напомним, что при дискретном начислении процентов $m$ раз в году по номинальной ставке $j$ наращенная сумма $S$ находится как

$$S = P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{mn}.$$

Чем больше $m$, тем меньше промежуток между моментами времени начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S = P \cdot \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{j}{m})^{mn} = P \cdot e^{j \cdot n},$$

где $e = 2{,}71$ - основание натуральных логарифмов.

Обозначим силу роста при непрерывной ставке процентов через $\delta$. Теперь можно записать

$$S = P \cdot e^{\delta \cdot n}. \qquad (3.17)$$

Таким образом, при непрерывном наращении процентов наращённая сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и силы роста. Последняя представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$.

Покажем, что дискретные и непрерывные ставки наращения находятся в функциональной зависимости. Из равенства множителей наращения $(1+i)^n = e^{\delta \cdot n}$ следует:

$$\delta = \ln(1+i), \qquad (3.18) \qquad\qquad i = e^{\delta} - 1. \qquad (3.19)$$

***Пример 3.7***

Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, составляет 2 млн. руб, сила роста 10%, срок – 5 лет. Наращенная сумма составит

$$S = 2000000 \cdot e^{0{,}1 \cdot 5} = 3297744{,}25 \text{ руб.}$$

Непрерывное наращение по ставке, равной 10% равнозначно наращению за тот же срок дискретных сложных процентов по годовой ставке. Находим

$$i = e^{\delta} - 1 = 0{,}10517 .$$

В итоге получим $S = 2\,000000 \cdot (1 + 0{,}10517)^5 = 3\ 297744{,}25$ руб.

Дисконтный множитель на основе силы роста (математической дисконтирование) может быть получен из формулы

$$P = S \cdot e^{-\delta \cdot n} \tag{3.20}$$

и составит величину $e^{-\delta \cdot n}$.

### 3.4.2 Переменная сила роста

Пусть сила роста изменяется во времени по некоторому закону в виде непрерывной функции времени: $\delta_t = f(t)$. Тогда наращённая сумма и современная величина определяются соответственно как $S = P \cdot e^h$ и $P = S \cdot e^{-h}$, где $h = \int_0^n f(t) \cdot dt$. Функция времени может быть самого различного вида. Рассмотрим два типовых случая вычислений.

Для линейной функции $\delta_t = \delta + a \cdot t$, где $a$ - прирост силы роста в единицу времени, $\delta$ - начальное значение силы роста, запишем выражение

$$\int_0^n \delta_t \cdot dt = \int_0^n (\delta + at) \cdot dt = \delta \cdot n + \frac{a \cdot n^2}{2} = h .$$

Таким образом, множитель наращения вычисляется по формуле:

$$q = e^{h} . \tag{3.21}$$

***Пример 3.8***

Пусть начальное значение силы роста равно 8 %, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется, прирост за год составляет 2% ($a$=0,002). Срок наращения 5 лет.

Для расчёта множителя наращения (3.21) вычислим значение показателя степени: $0{,}08 \cdot 5 + (0{,}02 \cdot 5^2)/2 = 0{,}65$. Искомый множитель составит $q = e^{0{,}65} = 1{,}91554$. Предположим, что сила роста линейно уменьшается (пусть $a$=-0,02). В этом случае степень множителя равна 0,15 и соответственно $q = e^{0{,}15} = 1{,}16183$.

Рассмотрим ситуацию, когда сила роста изменяется экспоненциально (по геометрической прогрессии): $\delta_t = \delta \cdot a^t$, где $\delta$ - начальное значение силы роста, $a$ - постоянный темп роста.

В этом случае степень множителя равна $\int\limits_0^n \delta_t \cdot dt = \frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)$, а значение множителя вычисляется по формуле $q = e^h$; $h = \frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)$.

***Пример 3.9***

Пусть начальный уровень силы роста составляет 8%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается (годовой прирост составляет 20%, $a = 1{,}2$), срок наращения 5 лет. Степень этого множителя за весь срок равна $\frac{0{,}8}{\ln 1{,}2} \cdot (1{,}2^5 - 1) = 0{,}65305$, соответственно $q = e^{0{,}65305} = 1{,}92139$.

Срок ссуды при постоянной силе роста вычислим по формуле (3.17):

$$n = \ln(\frac{S}{P}) / \delta .$$

Срок ссуды при наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста $a$) получим в виде:

$$n = \frac{\ln\left[1 + \frac{\ln a \times \ln(S/P)}{\delta}\right]}{\ln a} .$$

### Контрольные вопросы и задачи

1. Поясните термин «сила роста».
2. Как связаны непрерывные и дискретные ставки процентов?
3. Как учесть изменение силы роста во времени?
4. В чем заключается привлекательность непрерывных процентов в аналитических расчетах?
5. При какой номинальной ставке $j$ деньги удваиваются через 12 лет?
6. При какой номинальной ставке $j$ деньги удваиваются через 15 лет?
7. При данной процентной ставке $j$ 10 млн. руб. прирастают до 25 млн руб. через 20 лет. Какой будет сумма в конце 10 лет?
8. При данной процентной ставке $j$ 10 млн. руб. прирастают до 15 млн. руб. в конце 10 лет. Какой будет сумма в конце 6 лет?
9. Облигация стоит 18,75 млн. руб. и по ней выплачивается 25 млн. руб. через 10 лет. Какая процентная ставка $j$ обеспечит этот рост?
10. Найти годовую эффективную норму, соответствующую $1{,}5\ \%$, конвертируемым ежемесячно.
11. Заемщик получил ссуду в 1000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 5 лет. Расчет производится по схеме *сложных* процентов, причем первые 2 года годовая *процентная* ставка равна 12%, а в оставшееся время годовая *процентная* ставка равна 16%. Найти сумму, возвращаемую кредитору, и процентные деньги.
12. Пусть $K = 1000000$, $u = 0{,}12$, $t = 0{,}5$. В каком случае плата за кредит больше: при расчете по схеме простых процентов или при расчете по схеме сложных процентов?
13. Заемщик получил 01.02.2004 ссуду в 500000 долларов, возвратить которую необходимо 16.10.2004, а расчет производится по схеме простых процентов с 10% -ой годовой процентной ставкой. Какую сумму должен возвратить заемщик кредитору при расчётах по схемам ACC/ACC и ACT/360?
14. Покупатель обратился в банк с просьбой о предоставлении кредита на покупку автомобиля, стоимостью $18000. Банк предоставил покупателю *потребительский кредит* на срок в 3 года с расчетом по схеме *сложных* процентов на основе годовой процентной ставки в 9% с *ежемесячными* погашениями *постнумерандо*. Какую сумму денег покупатель должен ежемесячно перечислять банку?
15. В первый день *каждого года*, начиная с 1-го января 2008 года, вкладчик помещает на свой счет в банке 100000 рублей. Расчет производится по схеме *сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 6%. Какая сумма окажется на счете 31 декабря 2013 года?

# ГЛАВА 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЁТЫ. КРИВЫЕ ДОХОДНОСТИ

Непрерывное наращение и дисконтирование при постоянной силе роста. Непрерывное наращение и дисконтирование при переменной силе роста. Определение срока платежа и процентных ставок. Эквивалентность процентных ставок. Конверсия. Платежей. Финансовая эквивалентность обязательств. Эквивалентность процентных ставок. Эквивалентность простых, сложных, простых и сложных, дискретных и непрерывных процентных ставок. Средние процентные ставки. Консолидирование задолженности. Определение суммы и срока консолидированного платежа. Общая постановка задачи изменения условий выплаты платежей.

## 4.1 Средние процентные ставки

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней. Замена всех усредняемых значений ставок не на среднюю процентную ставку не изменяет результатов наращения или дисконтирования.

Начнём с простых ставок. Пусть за последовательные периоды $n_1$, $n_2$, $n_3$,…, $n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, ..., i_k$.

Искомые средние получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$1 + N \cdot \bar{i} = 1 + \sum_t n_t \cdot i_t .$$

Откуда получим

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t \cdot i_t}{N}, \tag{4.1}$$

где $\sum n_t \cdot i_t$ - общий срок наращения процентов.

Найденный показатель представляет собой среднюю арифметическую взвешенную с весами, равными продолжительности отдельных периодов.

Аналогичным способом определим среднюю учётную ставку:

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t \cdot d_t}{N}. \tag{4.2}$$

***Пример 4.1***

Контракт предусматривает переменную по периодам ставку простых процентов: 20, 22 и 25 %. Число последовательных периодов начисления процентов: два, три и пять месяцев. Какой размер ставки приведёт к аналогичному наращению исходной суммы?

**Решение.** Находим среднюю ставку:

$$\bar{i} = \frac{0{,}2 \cdot 2 + 0{,}22 \cdot 3 + 0{,}25 \cdot 5}{10} = 0{,}231 \;\; \textit{или} \;\; 23{,}1\% .$$

Если усредняются сложные переменные во времени ставки сложных процентов, то из равенства множителей наращения получим

$$(1+\bar{i})^{N} = (1+i_1)^{n1} \cdot (1+i_2)^{n2} \cdot \ldots \cdot$$

Следует

$$\bar{i} = \sqrt[N]{(1+i_1)^{n1} \cdot (1+i_2)^{n2} \cdot \ldots} - 1. \qquad (4.3)$$

Средняя величина в этом случае вычисляется как взвешенная средняя геометрическая.

***Пример 4.2***

Пусть для первых двух лет применяется ставка, равная 15 %, а для следующих трёх лет ставка составляет 20 %. Средняя ставка за весь срок ссуды равна

$$\bar{i} = \sqrt[5]{1{,}15^2 \cdot 1{,}2^3} - 1 = 0{,}17974 \ \textit{или} \ 17{,}974\%.$$

Кратко рассмотрим усреднение ставок, применяемых в нескольких однородных операциях, которые различаются суммами ссуд и процентными ставками. Искомые средние ставки находим из условия равенства соответствующих сумм после наращения процентов. Если применяются простые ставки и сроки $n$ этих операций одинаковы, то из равенства

$$\sum P_t \cdot (1 + n \cdot \bar{i}) = \sum P_t \cdot (1 + n \cdot i_t)$$

следует формула

$$\bar{i} = \frac{\sum P_t \cdot i_t}{\sum P_t}. \qquad (4.4)$$

Для случая сложных ставок однородных ссудных операций средняя ставка будет определяться по формуле

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t \cdot (1+i_t)^n}{\sum P_t}} - 1. \qquad (4.5)$$

## 4.2 Эквивалентность процентных ставок

Процентные ставки называют ***эквивалентными***, если замена одного вида ставки на другой при соблюдении принципа эквивалентности не изменяет финансовых отношений сторон в рамках одной операции. Получим формулы эквивалентности ставок, исходя из равенства взятых попарно множителей наращения.

### 4.2.1 Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Пусть через $i_s$ и $i$ обозначены соответственно ставки простых и сложных процентов, начальные и наращённые суммы при применении двух видов ставок идентичны. Приравняем множители наращения

$$(1 + n \cdot i_s) = (1 + i)^n .$$

В результате получим расчётные формулы:

$$i_s = \frac{(1 + i)^n - 1}{n} \quad \text{и} \quad i = \sqrt[n]{1 + n \cdot i_s} - 1 . \qquad (4.6);\ (4.7)$$

Аналогичным образом определим соотношения процентных ставок.

### 4.2.2 Эквивалентность простых процентных ставок

При выводе искомых соотношений между ставкой процента и учётной ставкой используется временная база $K = 360$ *или* $K = 365$ *дней*.

Если временные базы одинаковы, то из равенства соответствующих множителей наращения следует:

$$i_s = \frac{d_s}{1 - n \cdot d_s}, \qquad d_s = \frac{i_s}{1 + n \cdot i_s}, \qquad (4.8)\ (4.9)$$

где $d_s$ – *простая учётная ставка.*

***Пример 4.3***

Вексель учтен за год до даты его погашения по учётной ставке 15 %. Определить доходность учётной операции в виде процентной ставки.

По формуле (4.8) находим процентную ставку

$$i_S = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}15} = 0{,}17647 \text{ или } i_S = 17{,}647\ \%.$$

Другими словами, операция учёта по учётной ставке 15% за год даёт тот же доход, что и наращение по ставке 17,647 %.

Отметим, что отношения эквивалентности между простыми ставками $i_S$ и $d_S$ существенно зависят от срока операции. В частности, для ставки $d = 10\ \%$ находим следующие размеры эквивалентных ставок:

| $n$ (в годах) | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 5,0 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i_s$, % | 10,1 | 10,5 | 11,1 | 12,5 | 20,0 | $\infty$ |

Пусть срок ссуды измеряется в днях, тогда, после подстановки $n = t/K$ в формулы (4.8) и (4.9) получим следующие варианты соотношений эквивалентности:

| | | |
|---|---|---|
| Временные базы одинаковы – 360 дней | $i_S = \dfrac{360}{360 - t \cdot d_S}$ ? (4.10) | $d_S = \dfrac{360 \cdot i_S}{360 + t \cdot i_S}$ (4.11) |
| При начислении процентов $K = 365$; для учётной ставки $K = 360$ | $i_S = \dfrac{365 \cdot d_S}{360 - t \cdot d_S}$ (4.12) | $d_S = \dfrac{360 \cdot i_S}{365 + t \cdot i_S}$ (4.13) |

### 4.2.3 Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Представим соотношения эквивалентности простых ставок $i_S$ и $d_S$, с одной стороны, и сложных ставок $i$ и $j$, с другой стороны. Сложную учётную ставку не будем принимать во внимание. Попарно приравняв друг к другу соответствующие множители наращения, получим набор искомых соотношений.

| | | |
|---|---|---|
| Эквивалентность $i_S$ и $j$ | $i_S = \dfrac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{n}$ (4.14) | $j = m \cdot (\sqrt[mn]{1 + n \cdot i_S} - 1)$ (4.15) |
| Эквивалентность $d_S$ и $i$ | $d_S = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{n}$ (4.16) | $i = \sqrt[n]{1/(1 - n \cdot d_S)} - 1$ (4.17) |
| Эквивалентность $d_S$ и $j$ | $d_S = \dfrac{1 - (1 + j/m)^{-m \cdot n}}{n}$ (4.18) | $j = m \cdot (\sqrt[mn]{1/(1 - n \cdot d_S)} - 1)$ (4.19) |

### 4.2.4 Эквивалентность сложных процентных ставок

Ограничимся рассмотрением соотношений эквивалентности для ставок $i$, $j$ и $d$. Получим расчётные соотношения

| | | |
|---|---|---|
| Эквивалентность $i$ и $j$ | $i = (1 + j/m)^m - 1$, (4.20) | $j = m \cdot (\sqrt[m]{1 + i} - 1)$. (4.21) |
| Эквивалентность $d$ и $i$ | $i = \dfrac{d}{1 - d}$, (4.22) | $d = \dfrac{i}{1 + i}$ (4.23) |

### 4.3 Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Принято считать *эквивалентными* такие платежи, которые, будучи приведёнными к одному моменту времени, оказываются равными. Операция «*приведение*» осуществляется на основе путём дисконтирования (приведение к более ранней дате) или, наоборот, путём наращения суммы платежа (если эта дата относится к будущему). Если при изменении условий контракта принцип финансовой эквивалентности не соблюдается, то одна из участвующих сторон терпит ущерб, размеры которого можно заранее определить. Область применения принципа финансовой эквивалентности достаточно широка. Данный принцип лежит в основе преобладающего числа методов количественного финансового анализа.

В наиболее простом виде принцип финансовой эквивалентности следует из формул наращения и дисконтирования, связывающих величины $P$ и $S$.

Сумма $P$ эквивалентна сумме $S$ при принятой процентной ставке и методе её начисления. Две суммы денег $S_1$ и $S_2$, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы. Замена $S_1$ на $S_2$ в этих условиях формально и не изменяет отношения сторон.

***Пример 4.4***

На принципе эквивалентности основывается сравнение разновременных платежей. Пусть имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца; условия второго – выплатить 450 тыс. руб. через 8 месяцев. Можно ли считать их равноценными?

Поскольку платежи краткосрочные, то при дисконтировании на начало срока применим простую ставку, например 20 %. Получим

$$P_1 = \frac{400}{1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}2} = 375{,}00; \qquad P_2 = \frac{450}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}2} = 397{,}060 \text{ тыс. руб.}$$

Из расчётов следует, что сравниваемые обязательства не являются эквивалентными при заданной ставке и в силу этого не могут адекватно заменять друг друга.

Сравнение платежей предполагает использование некоторой процентной ставки и, следовательно, результат зависит от выбора её размера. Допустим, что сравниваются два платежа $S_1$ и $S_2$ со сроками $n_1$ и $n_2$, причём $S_1 < S_2$ и $n_1 < n_2$, а соотношение их современных стоимостей зависит от размера процентной ставки.

С ростом ставки $i$ размеры современных стоимостей уменьшаются, причём при $i = i_0$ наблюдается равенство $P_1 = P_2$. Для любой ставки $i < i_0$ имеем $P_1 < P_2$.

Таким образом, результат сравнения зависит от размера ставки, равного $i_0$. Назовём эту ставку критической или барьерной. На основе соотношения

$$\frac{S_1}{1+n_1\cdot i_0}=\frac{S_2}{1+n_2\cdot i_0} \quad \text{находим} \quad i_0=\frac{1-\frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2}\cdot n_2-n_1}. \tag{4.24}$$

***Пример 4.5***

Для условий примера 4.4 получим значение критической ставки

$$i_0=\frac{1-\frac{400}{450}}{\frac{400}{450}\cdot\frac{8}{12}-\frac{4}{12}}=0{,}428 \quad \textit{или} \quad 42{,}8\ \%.$$

Таким образом, соотношение $P_1<P_2$ справедливо при любом уровне процентной ставки, который меньше 42,8 %.

Если дисконтирование производится по сложной ставке, то значение критической ставки можно получить из равенства.

$$S_1\cdot(1+i_0)^{-n_1}=S_2\cdot(1+i_0)^{-n_2}.$$

В итоге получим:

$$i_0=\sqrt[n_2-n_1]{\frac{S_2}{S_1}}-1. \tag{4.25}$$

**Консолидирование (объединение) задолженности**

Одним из распространённых случаев изменения условий контрактов является *консолидация* (объединение) платежей. Пусть платежи $S_1,S_2,...,S_m$ со сроками $n_1,n_2,...,n_m$ заменяются одним платежом в сумме $S_0$ и сроком $n_0$. В этом случае возможны <u>две постановки задачи</u>: а) задаётся срок $n_0$, а вычисляется сумма $S_0$; б) задана сумма консолидированного платежа $S_0$, а определяется срок $n_0$.

**Определение размера консолидированного платежа.** При решении этой задачи уравнение эквивалентности имеет простой вид. В общем случае, когда справедливо соотношение $n_1<n_2<...<n_m$, искомую величину находят как сумму наращённых и дисконтированных платежей. Так, при применении простых процентных ставок получим

$$S_0=\sum_j S_j\cdot(1+t_j\cdot i)+\sum_k S_k\cdot(1+t_k\cdot i)^{-1}, \tag{4.25}$$

где $S_j$ - размеры объединяемых платежей со сроками $n_k < n_0$; $S_k$ - размеры платежей со сроками $n_k > n_0$,

$$t_j = n_0 - n_j; \qquad t_k = n_k - n_0.$$

***Пример 4.6***

Два платежа размерами 1,0 и 0,5 млн. руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Стороны согласились на применение при конверсии простой ставки, равноё 20 %. Консолидированная сумма составит

$$S_0 = 1000 \cdot (1 + \frac{200-150}{365} \cdot 0{,}2) + 500 \cdot (1 + \frac{200-180}{365} \cdot 0{,}2) = 1532{,}87 \textit{ тыс. руб.}$$

Консолидацию платежей можно осуществить и на основе сложных процентных ставок. Вместо выражения (4.25) для общего случая $n_1 < n_0 < n_m$ получим

$$S_0 = \sum_j S_j \cdot (1+i)^{t_j} + \sum_k S_k \cdot (1+i)^{-t_k}. \qquad (4.26)$$

***Пример 4.7***

Платежи в 1 и 2 млн. руб. и сроками уплаты через 2 и 3 года соответственно объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20 %. Искомая сумма (консолидированный платеж) составит

$$S_0 = 1000 \cdot 1{,}2^{0,5} + 2000 \cdot 1{,}2^{-0,5} = 2921{,}187 \textit{ тыс. руб.}$$

**Определение срока консолидированного платежа.** При решении этой задачи уравнение эквивалентности имеет простой вид. Если при объединении платежей задана величина консолидированного платежа $S_0$, то возникает проблема определения его срока $n_0$. В этом случае уравнение эквивалентности можно представить в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей.

При применении простой ставки это равенство имеет вид

$$S_0 \cdot (1 + n_0 \cdot i)^{-1} = \sum_j S_j \cdot (1 + n_j \cdot i)^{-1},$$

откуда получим формулу

$$n_0 = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{S_0}{\sum_j S_j \cdot (1 + n_j \cdot i)^{-1}}\right). \qquad (4.27)$$

Отметим, что решение может быть получено при условии, когда размер заменяющего платежа больше суммы современных стоимостей заменяемых платежей. Подчеркнём, что искомый срок пропорционален величине консолидированного платежа.

***Пример 4.8***

Суммы в размере 10, 20 и 15 млн. руб. должны быть выплачены соответственно через 50, 80 и 150 дней. Необходимо заменить их одним платежом.

Современная стоимость заменяемых платежей, которую обозначим через $P$, при условии, что $i = 10\%$ и $K = 365$, составит

$$P = 10 \cdot (1 + \frac{50}{365} \cdot 0{,}1)^{-1} + 20 \cdot (1 + \frac{80}{365} \cdot 0{,}1)^{-1} + 15 \cdot (1 + \frac{150}{365} \cdot 0{,}1)^{-1} = 43{,}844 \textit{ млн. руб.}$$

На основе выражения (4.27) находим срок платежа

$$n_0 = \frac{1}{0{,}1} \cdot (\frac{50}{43{,}844} - 1) = 1{,}404 \textit{ года} \text{ или 512 дней.}$$

**Контрольные вопросы и задачи:**

1. Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20 %?

2. Клиент положил в банк 10 тыс. руб. сроком на один год. Согласно депозитному договору годовая процентная ставка до середины второго квартала составляет 30%, далее до конца третьего квартала - 25%, а с начала четвертого квартала - снова 30%. Какую сумму клиент получит в конце года при условии, что договор предусматривает начисление а) по простым процентам; б) по сложным процентам?

3. Первоначально цену товара снизили на 10 %, затем - на 15 %, потом еще на 20 %. На сколько всего процентов снизили цену?

4. Вкладчик внес в Сбербанк под определенный процент 20 тыс. руб. Через год он снял со счета половину процентной прибавки, а основной вклад и оставшуюся прибавку оставил в банке. Еще через год у вкладчика на счету оказалось 26400 руб. Каков процент годовых по вкладу в Сбербанке?

5. В банк было положено 1500 руб. Через 1 год и 3 месяца на счете оказалось 1631,25 руб. Сколько простых процентов в год выплачивает банк?

6. Инвестор имеет 20 тыс. руб. и хочет, вложив их в банк на депозит, получить через 2 года 36 тыс. руб. Рассчитать значение требуемой для этого процентной ставки.

7. Что выгоднее: вложить 15 тыс. руб. на год под 12,5% или на 3 месяца под годовую ставку 12%?

8. Студент имеет 100 долл. и решает: сберечь их или потратить. Если он положит деньги в банк, то через год получит 112 долл. Инфляция составит 14% в год. Определить: а) номинальную процентную ставку; б) реальную процентную ставку; в) что бы вы посоветовали студенту; г) как повлияло бы на Ваш совет снижение темпа инфляции до 10% при неизменной номинальной ставке процента.

9. На сумму 1,5 млн. руб. в течение трех месяцев начисляются простые проценты из расчета 18 % годовых. Ежемесячная инфляция в рассматриваемом периоде характеризуется темпами 5 %. Определить наращенную сумму с учетом инфляции.

10. Ссуда в 800 тыс. руб. выдана сроком на пять лет под простые проценты по ставке 20% годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга. Как изменится величина накопленного долга при снижении ставки процентов в два раза?

# ГЛАВА 5 ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

В финансовой практике часто используются не отдельные разовые платежи, а *серию платежей*, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют ***потоком платежей***. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления – положительными величинами.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются *наращенная сумма* и *современная величина*. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под современной величиной потока платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

## 5.1 Постоянные финансовые ренты (аннуитеты)

**Поток платежей,** все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом.**

Финансовая рента имеет следующие параметры: **член ренты** - величина каждого отдельного платежа, **период ренты** - временной интервал между двумя соседними платежами, **срок ренты** - время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода, **процентная ставка** - ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту, число платежей в году, число начислений процентов в году, моменты платежа внутри периода ренты.

### Виды финансовых рент

Классификация рент может быть осуществлена по различным признаками. Рассмотрим их.

В зависимости от продолжительности периода, ренты делят на *годовые* и *p-срочные*, где $p$ - число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают *постоянные* (с равными членами) и *переменные ренты*. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают *ренты верные* и *условные*. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов или ограниченные и бесконечные или вечные. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на группы: немедленные и отложенные или отсроченные. Срок немедленных рент начинается сразу, у отложенных рент - запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются обычными или *постнумерандо*. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются *пренумерандо*. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

### 5.2 Формулы наращенной суммы. Обычная годовая рента

Пусть в конце каждого года в течение $n$ лет на расчетный счет вносится по $R$ рублей, проценты начисляются один раз в года по ставке $i$. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R \cdot (1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличится до $R \cdot (1+i)^{n-2}$ и т. д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты её наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R \cdot (1+i) + R \cdot (1+i)^2 + ... + R \cdot (1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель есть (1+i), число членов прогрессии - $n$. Сумма членов прогрессии определяется по известной формуле

$$S = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}. \qquad (5.1)$$

Введём обозначение

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (5.2)$$

и назовём его *коэффициентом наращения ренты*. Коэффициент наращения зависит только от срока ренты $n$ и уровня процентной ставки $i$. Потому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами. Коэффициент наращения представляет собой наращённую сумму, член которой равен 1:

$$s_{n;i} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n-1}{i}. \qquad (5.3)$$

Таким образом, получим

$$S = R\cdot s_{n;i}. \qquad (5.4)$$

Коэффициент наращения ренты зависит только от срока (числа членов ренты) и процентной ставки. С увеличением значения каждого из этих параметров его величина растёт. При $i = 0$ имеем $S = R\cdot n$.

***Пример 5.1***

В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10 %. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

***Решение***

$$S = 10\frac{(1+0{,}1)^3-1}{0{,}1} = 33{,}1\cdot$$

**Годовая рента, начисление процентов $m$ раз в году**

Проиллюстрируем усложнение формулы в случае, когда платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют $m$ раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j - номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)}, \ldots, R.$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателей $(1+j/m)^m$, а число членов $n$. Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1} = R\cdot s_{b;c}, \quad \text{где} \quad b = m\cdot n; \; c = j/m. \qquad (5.5)$$

***Пример 5.2***

Для обеспечения будущих расходов создаётся фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа составляет 4 млн. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5% годовых.

Пусть проценты начисляются поквартально. Имеем $j/m = 18{,}5/4,\ m \cdot n = 20$:

$$S = 4 \cdot \frac{(1+0{,}185/4)^{20} - 1}{(1+0{,}185/4)^{4} - 1} = 29{,}663 \text{ млн. руб.}$$

**Рента p-срочная,** $m = 1$

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается $p$ раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если $R$ - годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен $R/p$. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \ldots, \frac{R}{p},$$

у которой первый член $R/p$, знаменатель $(1+i)^{1/p}$, общее число членов $n \cdot p$. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{(1/p)\cdot n \cdot p} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = R \cdot s_{n;i}^{(p)}.$$

$s_{n;i}^{p}$ - коэффициент наращения p-срочной ренты при $m = 1$.

**Рента p-срочная,** $p = m$

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей $p$ в году и число начислений процентов $m$ совпадают, т. е. $p = m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год. Таким образом, имеем

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+j/m)^{m \cdot n} - 1}{j/m} = R \cdot \frac{(1+j/m)^{m \cdot n} - 1}{j}.$$

**Рента p-срочная, p>1, m>1**

Это самый общий случай $p$-срочной ренты с начислением процентов $m$ раз в году, причем, возможно $p \geq m$.

Первый член ренты $R/p$, уплаченный спустя $1/p$ года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-\frac{1}{p})}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до величины

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-\frac{2}{p})}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-2(m/p)}$$

и т. д. Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен $R/p$, её знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов $n\cdot m$. В результате получаем наращенную сумму

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}}{p\cdot(1+j/m)^{m/p}-1}=R\cdot\frac{(1+j/m)^{m\cdot n}-1}{p\cdot[(1+j/m)^{m/p}-1]}.$$

Отметим, что из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения $p$ и $m$.

## 5.3 Формулы современной величины постоянной ренты постнумерандо

Напомним, что под современной стоимостью потока платежей понимают сумму дисконтированных членов этого потока на некоторый предшествующий момент времени. Вместо термина «современная стоимость» (современная величина) потока платежей употребляют также термины: капитализированная стоимость или приведённая величина.

**Обычная годовая рента**

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты $n$. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R\cdot\frac{1}{1+i}=R\cdot v,$$

где $v=\dfrac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна $R\cdot v^2$ и т. д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию вида: $R\cdot v$, $R\cdot v^2$, $R\cdot v^3$, ..., $R\cdot v^n$, сумма членов которой равна

$$A=R\cdot v\cdot\frac{v^n-1}{v-1}=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=R\cdot a_{n;j},\qquad(5.6)$$

где

$a_{n;i}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ - коэффициент приведения ренты.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты $n$ и процентной ставки $i$. Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в справочниках или построить самим на компьютере.

***Пример 5.3***

Годовая рента постнумерандо характеризуется параметрами: $R$=4 млн. руб. , $n=5$. При дисконтировании по сложной ставке процента, равной 18,5 % годовых, получим

$$A = 4 \cdot a_{5;18,5} = 4 \cdot \frac{1-1{,}185^{-5}}{0{,}185} = 4 \cdot 3{,}092 = 12{,}368 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, все будущие платежи оцениваются в настоящий момент в сумме 123,368 млн. руб. Другими словами, 12,368 млн. руб., размещённых под 18,5 % годовых, обеспечивают ежегодную выплату по 4 млн. руб. в течение 5 лет.

### Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть А - современная величина годовой ренты постнумерандо, а S -её наращенная стоимость к концу срока $n$, p = 1, $m$ = 1.

Покажем, что наращение процентов на сумму А за $n$ лет дает сумму, равную S:

$$A \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S. \qquad (5.7)$$

Отсюда же следует, что дисконтирование S дает A:

$$S \cdot v^n = A, \qquad (5.8)$$

а коэффициенты дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i} \cdot (1+i)^n = S_{n;i}\ ; \qquad S_{n;i} = a_{n;i} \qquad (5.9)\ (5.10)$$

## 5.4 Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты $s$ или её современной стоимости $A$ остальных параметров ренты: $R$, $n$, $i$, $p$, $m$. Такие параметры, как $m$ и $p$, обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры $R$, $n$, $i$. Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

### Определение размера ежегодной суммы платежа $R$

Исходные условия задачи: указывается значение $S$ или $A$ и набор параметров, кроме $R$. Например, за определённый срок необходимо создать фонд в сумме $S$ путём систематических постоянных взносов. Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов, то, используя формулу (5.4), получим

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}. \qquad (5.11)$$

Пусть теперь условиями договора задана современная стоимость ренты. Если рента годовая (m=1), то из выражения (5.6) следует

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}. \qquad (5.12)$$

Таким образом, если ставится задача накопить за определённый срок некоторую сумму $S$, то прибегают к формуле (5.11), если же речь идёт о погашении задолженности в сумме $A$, то используют соотношение (5.12).

Аналогичным образом можно определить величину $R$ и для других условий ренты.

**Расчёт срока ренты**

При разработке условий контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты и, соответственно, числа членов ренты. Решая полученные выше соотношения, определяющие $S$ и $A$, относительно параметра $n$, получим искомые формулы. Для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов находим

$$n = \frac{\ln(\frac{S}{R} \cdot i + 1)}{\ln(1+i)}, \qquad n = \frac{\ln(1 - \frac{A}{R} \cdot i)^{-1}}{\ln(1+i)}.$$

Аналогичным образом определяются сроки и для других видов рент.

Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для **S** и **A**

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ и } A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

относительно срока n, получаем соответственно следующие два выражения

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} \text{ и } n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}$$

Последнее выражение, очевидно, имеет смысл только при **R>Ai**.

Определение ставки процентов

Для того, чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (опять предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ или } A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = s_{n;i} \text{ или } \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R} = a_{n;i} \qquad (5.13)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка i. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно.

Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона-Рафсона и др. Мы рассмотрим сначала первый из них.

<u>Метод линейной интерполяции</u>

Прежде всего нужно найти с помощью прикидочных расчетов нижнюю (**$i_н$**) и верхнюю (**$i_в$**) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (5.13) различных числовых значений i и сравнения результата с правой частью выражения. Далее корректировка нижнего значения ставки производится по следующей интерполяционной формуле

$$i = i_н + \frac{s - s_н}{s_в - s_н}(i_в - i_н), \qquad (5.14)$$

в которой $s_н$ и $s_в$ - значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок $i_н$ и $i_в$ соответственно. Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (5.14), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения).

Рассмотрим особенности <u>метода Ньютона-Рафсона</u>.

В этом методе решение также находят итеративно, постепенно шаг за шагом уточняя оценку. Метод разработан для решения нелинейных уравнений вида f (x)=0. В нашем конкретном случае алгоритм поиска сводится к трем операциям на каждом шаге, которые зависят от постановки задачи (задана S или A) и типа ренты. Сначала будем считать, что известна наращенная сумма S и найдена какая-то начальная оценка процентной ставки (например, методом проб).

<u>А) Постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, p=1, t=1.</u> Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = s_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{(1+i)^n - 1}{i} - s_{n;i} = 0.$$

Если ввести обозначение **$q=1+i$** и умножить обе части уравнения на **$-(q-1)$**, то получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k) = q_k^n - 1 - \frac{S}{R}(q_k - 1)$$

$$f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S}{R}$$

$$q_{k+1} = q_k - \frac{f(q_k)}{f'(q_k)}$$

Б) Постоянная р-срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, **р≥1, t=1**. Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}=\frac{S}{R}=s_{n,i}^{(p)} \text{ или } \frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}-s_{n,i}^{(p)}=0.$$

Вновь используем обозначение $q_0=1+i_0$ и получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге $k$, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^n-1-\frac{S}{R}p(q_k^{1/p}-1)$$

$$f'(q_k)=nq_k^{n-1}-\frac{S}{R}\left(q_k^{(1/p)-1}\right)$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}$$

Сделаем ряд замечаний:

1) Начальную оценку $q_0=1+i_0$ требующуюся для начала итеративной процедуры следует выбирать такой, чтобы соответствующий ей множитель наращения был как можно ближе к заданному отношению S/R. Это сократит число итераций и обеспечит сходимость алгоритма.

2) Остановка вычислений осуществляется после того как проверка, заключающаяся в сравнении множителя наращения и отношения **S/R**, свидетельствует об их совпадении с достаточной (наперед заданной) точностью.

Теперь будем считать, что известна современная стоимость А и найдена какая-то подходящая начальная оценка процентной ставки.

А) Постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, ***p=1, t=1***.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{A}{R}=a_{n;i} \text{ или } \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-a_{n;i}=0$$

уточнения оценки на каждом шаге к, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^{-n}-1+\frac{A}{R}(q_k-1)$$

$$f'(q_k)=\frac{A}{R}-nq_k^{-(n+1)}$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}$$

Б) Постоянная р-срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, р≥1, t=1. Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}=\frac{A}{R}=a_{n,i} \text{ или } \cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}-a_{n,i}=0.$$

Сделав подстановку **q=1+i**, получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге **k**, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k) = q_k^{-n} - 1 + \frac{A}{R} p(q_k^{1/p} - 1)$$

$$f'(q_k) = \frac{A}{R} q_k^{(1/p)-1} - n q_k^{-(n+1)}$$

$$q_{k+1} = q_k - \frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

## 5.5 Другие виды финансовых рент

### 5.5.1 Вечная рента

Под вечной рентой понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено, то есть она выплачивается бесконечное число лет (например, выплаты по бессрочным облигационным займам). В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно. А вот современная величина имеет вполне определенное конечное значение. Рассмотрим, например, бесконечную постоянную годовую ренту постнумерандо (p=1, m=1).

Рассмотрим, например, бесконечную постоянную годовую ренту постнумерандо ($p$=1, $m$=1).

При n→∞ $\lim A = \lim R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}$

В общем случае, когда $p \geq 1$, $m \geq 1$

при n→∞ $\lim A = R \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]} = \frac{R}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]}$.

Если же $p \geq 1$, $m \geq 1$ и $p = m$, то

при $n \to \infty$ $\lim A = R \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]} = \frac{R}{j}$.

### 5.5.2 Отложенная рента

Начало отложенной (или отсроченной) ренты отодвигается от момента заключения сделки на какой-то момент в будущем. Наращенная сумма такой ренты может быть подсчитана по тем формулам, которые нам уже известны. А ее современную величину можно определить в два этапа: сначала найти современную величину соответствующей немедленной ренты (эта сумма характеризует ренту на момент начала ее срока), а затем с помощью дисконтирования этой величины по принятой ставке в течение срока задержки привести ее к моменту заключения договора. Например, если современная величина годовой немедленной ренты равна A, то современная величина отложенной на t лет ренты составит

$$A_t = Av^t,$$

где $v^t$ - дисконтный множитель за $t$ лет, $v=1/(1+i)<1$.

### 5.5.3 Рента пренумерандо

Рассмотрим теперь ренту, когда платежи производятся в начале каждого периода, - *ренту пренумерандо*. Различие между рентой постнумерандо и рентой пренумерандо заключается лишь в том, что у последней на один период начисления процентов больше. В остальном структура потоков с одинаковыми параметрами одинакова. Поэтому наращенные суммы обоих видов рент (с одинаковой периодичностью платежей и начисления процентов и размером выплат) тесно связаны между собой.

Если обозначить через $\ddot{S}$ наращенную сумму ренты пренумерандо, а через S, как и раньше, наращенную сумму соответствующей ренты постнумерандо, то в самом общем случае получим

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^{m/p}.$$

Точно также для современной величины ренты пренумерандо и соответствующей ей ренты постнумерандо имеем следующее соотношение:

$$\ddot{A} = A(1 + j/m)^{m/p}.$$

### 5.5.4 Рента с платежами в середине периодов

Наращенная сумма ($S_{1/2}$) и современная стоимость ($A_{1/2}$) ренты с платежами в середине периодов и соответствующей ренты постнумерандо связаны следующим образом

$$S_{1/2}=S(1+j/m)^{m/p} \quad \text{и} \quad A_{1/2}=A(1+j/m)^{m/(2p)}.$$

## 5.6 Анализ переменных потоков платежей

### 5.6.1 Нерегулярный поток платежей

Временные интервалы между последовательными платежами в нерегулярном потоке могут быть любыми, не постоянными, любыми могут быть так же и члены потока. Обобщающие характеристики в этом случае получают только путем прямого счета:

наращённая сумма

$$S = \sum_t R_t (1+i)^{n-t}$$

современная величина

$$\sum_t R_t v^t ,$$

где t - время от начала потока платежей до момента выплаты,

$R_t$ - сумма платежа.

### 5.6.2 Переменная рента с разовыми изменениями размеров платежа

Пусть общая продолжительность ренты n и этот срок разбит на k участков продолжительностью $n_1, n_2, \dots, n_k$, в каждом из которых член ренты постоянен и равен $R_t$, t=1, 2, …, k, но изменяется от участка к участку. Тогда наращенная сумма для годовой ренты постнумерандо (p=1, m=1) вычисляется по формуле

$$S = R_1 s_{n_1;i}(1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2;i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k s_{n_k;i}$$

а современная величина как

$$A = R_1 a_{n_1;i} + R_2 a_{n_2;i} v^{n_1} + \ldots + R_k a_{n_k;i} v^{n-n_k} .$$

### 5.6.3 Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом a (положительным или отрицательным). Если рента годовая постнумерандо, то размеры последовательных платежей составят *R, R+a, R+2a,…, R+(n-1)a*. Величина t-го члена равна $R_t = R+(t-1)a$. Тогда современная стоимость такой ренты равна

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right) a_{n,i} - \frac{nav^n}{i}$$

а наращённая сумма равна

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right) s_{n,i} - \frac{na}{i} .$$

В случае $p$ - срочной ренты с постоянным приростом платежей ($m = 1$) последовательные выплаты равны $R, R+\frac{a}{p}, R+2\cdot\frac{a}{p}, \ldots, R+(p\cdot n-1)\cdot\frac{a}{p}$, где $a$ - прирост платежей за год, $R$ - первый платёж, т. е. $R_t = R+(t-1)\cdot\frac{a}{p}$, где $t$ - порядковый номер члена ряда, $t = 1, 2, \ldots, np$.

Таким образом, современная величина

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{a(t-1)}{p}\right) v^{t/p}$$

а наращённая сумма

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{a(t-1)}{p}\right)(1+i)^{n-t/p} .$$

### 5.6.4 Ренты с постоянным относительным изменением платежей

Если платежи годовой ренты изменяются с постоянным темпом роста q, то члены ренты будут представлять собой ряд: $R, R \cdot q, ..., R \cdot q^{n-1}$. Величина *t*-го члена равна $R_t = R \cdot q^{t-1}$.

Для того чтобы получить современную величину, дисконтируем эти величины: $R \cdot v, R \cdot q \cdot v^2, ..., R \cdot q^{n-1} \cdot v^n$. В результате получим геометрическую прогрессию.

Сумма этих величин равна

$$A = Rv\frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R\frac{q^n v^n - 1}{q - (1+i)}.$$

Наращённая сумма определяется по формуле

$$S = A(1+i)^n = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}.$$

Для *p*-срочной ренты ($m = 1$)

$$A = R\frac{q^{np} v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}} \qquad S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}$$

### 5.7 Конверсия аннуитетов

В практике иногда возникает необходимость изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов, то есть конвертировать ренту. Рассмотрим некоторые типичные ситуации.

**Выкуп ренты.** Выкуп ренты представляет собой замену предстоящей последовательности выплат единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что в этом случае вместо ренты выплачивается ее современная величина.

**Рассрочка платежей**. Это замена единовременного платежа аннуитетом. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять величине заменяемого платежа. Далее задача обычно сводится к определению члена ренты или ее срока при остальных заданных параметрах.

**Замена немедленной ренты на отсроченную**. Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами $R_1, n_1, i$, и её необходимо заменить на отсроченную на *t* лет ренту, то есть начало ренты сдвигается на *t* лет. Обозначим параметры отложенной ренты как $R_2, n_2, i$. Ставку процентов при этом будем считать неизменной. Тогда может быть два типа расчетных задач.

1. Задан срок $n_2$, требуется определить размер $R_2$.

Исходим из принципа финансовой эквивалентности результатов, то есть из равенства современных стоимостей заменяемого и заменяющего потоков: $A_1=A_2$. Раскрывая это равенство, получаем

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^{-t}$$

то есть

$$R_2 = R_1\left(\frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}}\right)(1+i)^t$$

В частном случае, когда $n_1=n_2=n$, решение упрощается и принимает следующий вид

$$R_2=R_1(1+i)^t$$

2. Размеры платежей заданы, требуется определить срок $n_2$. Рассмотрим частный случай, когда платежи годовой ренты остаются теми же $R_2=R_1=R$. Исходя из равенства современных стоимостей,

$$R\ a_{n_1,i} = Ra_{n_2,i} v^{-t},$$

где

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

Последовательно приходим к выражению

$$n_2 = \frac{-\ln[1-(1-(1+i)^{-n_1})(1+i)^t]}{\ln(1+i)}.$$

***Изменение продолжительности ренты***

Пусть имеется годовая обычная рента, и у партнеров есть договоренность об изменении срока ренты, то есть вместо срока $n_1$, принят новый срок $n_2$. Тогда для эквивалентности финансовых результатов требуется изменение и размера платежа. Найдем его из равенства

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i},$$

из которого следует, что

$$R_2 = R_1\frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} = R_1\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}.$$

**Общий случай изменения параметров ренты**

В случае одновременного изменения нескольких параметров ренты, исходим из равенства $A_1=A_2$. Если рассматривается годовая рента, то приводится к виду

$$A_1 = R_2\frac{1-\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2 n_2}}{p_2\left[\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{m_2/p_2}-1\right]},$$

где $A_1$ подсчитывается заранее, ряд параметров задается по согласованию сторон, и один параметр находится из этого уравнения.

**Объединение рент**

В случае объединения (консолидации) нескольких рент в одну из принципа финансовой эквивалентности обязательств до и после операции следует, что

$$A = \sum_{k} A_k ,$$

где A- современная величина заменяющей ренты; $A_k$ - современная величина k-й объединяемой ренты.

**Контрольные вопросы и задачи**

1. Дать определение финансовой ренты.

2. В чём заключается отличие рент пренумерандо и постнумерандо?

3. Привести примеры непрерывной ренты.

4. Запишите и прокомментируйте формулы наращённой суммы постоянной ренты постнумерандо.

5. Сдан участок в аренду на 10 лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо (выплаты в конце периода) на следующих условиях: первые 6 лет по 10 млн. руб., в оставшиеся 4 года по 11 млн руб. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 15%.

6. Ежегодно в начале года индивидуальный предприниматель делает в банк очередной взнос в размере 1 млн. руб.; банк платит 12 % годовых. Какая сумма будет на счете по истечении 3 лет?

7. Предполагается, что платежи каждый год будут уменьшаться на 20 тыс. руб. Первая выплата равна 500 тыс. руб. Платежи и начисления процентов производятся один раз в конце года на протяжении 8 лет, ставка – 8 % в год. Необходимо найти современную величину и наращенную сумму данной ренты.

8. Доходы в размере 100 тыс. руб. в год поступают непрерывно и равномерно в течение 3 лет. Ожидается, что инфляция в будущем составит 5% в год, и величина доходов будет определяться с поправкой на инфляцию. Какова современная стоимость корректируемого на инфляцию потока поступлений, если годовая ставка составляет 7%? Решить задачу для двух вариантов описания динамического ряда платежей: а) дискретная рента; б) непрерывный поток платежей.

9. Вкладчик открывает накопительный счет 1000 долл. под простую ставку 7 %. Какова будет сумма вклада через 2 года, если вкладчик через год: а) вносит дополнительно 1000 долл.; б) снимает со счета 200 долл.?

10. Платежи, поступающие в конце каждого квартала на протяжении 2 лет, образуют регулярный по времени поток, первый член которого равен 500 тыс. руб.; последующие платежи увеличиваются каждый раз на 25 тыс. руб. Начисление процентов производится раз в год по ставке 6 %. Найти наращенную и современную стоимость ренты.

11. Инвестор желает накопить с помощью ежегодных платежей за 5 лет сумму в 1200 тыс. руб. Банк платит 10 % годовых по ставке сложного процента. Какой взнос должен делать инвестор: а) в конце года; б) в начале года?

12. Рента постнумерандо с условиями: 2 млн. руб., $n$=5 лет, $i$=8 % откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. *Определить:* а) новый срок, при котором результат будет сбалансирован, т. е. добиться эквивалентности выплачиваемых сумм; б) изменится ли ответ, если изменится размер платежа посто-

янной ренты; в) изменится ли ответ, если платежи будут производиться в начале года; г) как учесть разницу, образующуюся в связи с тем, что ответ получился дробным, а рента выплачивается за целое число лет?

13. Требуется выкупить вечную ренту с платежами 5 тыс. руб. в конце каждого полугодия. Получатель ренты начисляет проценты раз в году по ставке 25%. Чему равна сумма выкупа (стоимость ренты)?

14.Сумма инвестиций, осуществленных за счет привлеченных средств, равна 10 млн. руб. Предполагается, что отдача от них составит 1 млн. руб. ежегодно (получаемых в конце года). *Определить:* за какой срок Т окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по ставке 5 % годовых?

15. Постоянная рента с платежами в конце периода имеет следующие характеристики: $n$ - срочность (годы), $p$ - число выплат в году, $R$ - размер платежа; в конце периодов ренты начисляются простые проценты исходя из годовой номинальной ставки. *Требуется* вывести формулу для определения наращенной суммы ренты на конец её срока.

16. На счет в банке положена сумма $P$ под годовую ставку сложного процента $r$. В конце каждого года производятся довложения в размере $g$. Чему равна полная сумма счета через $T$ лет?

17. Годовая немедленная рента с параметрами $R_1$, $n$, $i$ заменяется на отсроченную на $T$ лет годовую ренту той же продолжительности и при неизменной процентной ставке. *Определить* размер платежа $R_2$ новой ренты при условии, что начисление процентов производится один раз в год.

18. Какую сумму должны родители вложить сегодня на накопительный вклад при ставке 10 % годовых, чтобы обеспечить сыну ежегодные выплаты в размере 20000 руб. в течение 5 лет обучения в университете? Задачу решить для двух вариантов процентной ставки: а) простой и б) сложной.

19. Предположим, что две ваши тёти оставили вам завещания на получение определенной суммы денег. По *первому завещанию* Вы получаете 50 тыс. руб. сейчас и еще 50 тыс. руб. через год. По *второму завещанию* - 10 тыс. руб. сейчас, 50 тыс. - через год, и еще 50 тыс. руб. в конце 2-го года. Вы можете выбрать только одно завещание. Какой вариант вы предпочтете, если рыночная ставка процента равна 5 %?

20. Найти текущую стоимость аннуитета по 60 долл. в год в течение 20 лет с первой выплатой в конце 10-го года. Годовая ставка составляет 8%.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены классические задачи начисления простых, сложных и непрерывных процентов, методы наращения и дисконтирования по учетным ставкам, играющие важную роль в финансовом анализе.

Систематическое изучение финансовой математики дает возможность овладеть основами современных финансовых расчётов, разобраться в тонкостях финансовых сделок, в механизмах принятия финансовых решений.

Важнейшая составная часть занятий по финансовой математике, необходимая для полного усвоения программы курса - самостоятельная работа студентов. Как показывает наш педагогический опыт, добиться усвоения теории и понимания специфических схем и алгоритмов финансовых расчётов можно только через целенаправленное решение прикладных задач. Поэтому целью самостоятельной работы студентов должно быть систематическое закрепление и углубление знаний, полученных на лекциях, и активная подготовка к текущим практическим занятиям, промежуточным формам контроля знаний (тестированию, контрольным работам и др.).

По учебному плану бакалавров направления "Экономика" учебный курс "Финансовая математика" относится к циклу общепрофессиональных дисциплин, формирующих профессиональные компетентности экономиста любого профиля. Качественное освоение учебной программы финансовой математики позволит студентам получить необходимые базовые знания и умения в области финансового анализа и подняться на более высокий уровень изучения других профессиональных дисциплин.

**Рекомендуемая литература:**

**А. Основная литература**


1. Капитоненко В.В. Задачи и тесты по финансовой математике: учебное пособие.- М.: Финансы и статистика, 2007.- 256 с.
2. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: учебное пособие. Руководство по изучению дисциплины. Практикум по курсу. Тесты - М.: МЭСИ, 2004.-134 с.
3. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: учебно-методический комплекс.- М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008. – 200 с.
4. Малыхин В.И. Финансовая математика: учебное пособие для вузов.- 2-е изд., переаб. и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.-237 с.
5. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учебник - М.: Изд-во «Дело» АНХ, 2008.- 400 с.


**Б. Дополнительная литература**


1. Мицкевич А.А. Финансовая математика.- М.: ОЛМА-ПРЕСС Инвест: Институт Экономических стратегий, 2003.- 128 с. (Успешный бизнес. Мастер-класс).
2. Ковалев В.В. Финансовый анализ, управление капиталом, выбор инвестиций, анализ отчетности.- М.: Финансы и статистика, 1995. - 432 с.
3. Лукасевич И.Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений: учеб. пособие. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998. -400с.
4. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. - М.: Дело, 1998. -256 с.
5. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. - М.: ИНФРА-М, 1998.
6. Берзон Н.И., Буянова Е.А., Кожевников М.А., Чаленко А.В. Фондовый рынок. Учеб. пособие для вузов экономического профиля. -2-е изд. - М.: Вита-Пресс, 1999. -400 с.
7. Бригхэм Ю.Ф. Энциклопедия финансового менеджмента. - М.: РАГС-"ЭКОНОМИКА", 1998. -816 с.
8. Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. Учеб. пособие. М.: Федеративная книготорговая компания, 1998. - 352 с.
9. Деньги и банки. Энциклопедический справочник. Русско-английский финансовый словарь. - М.: Центр СЭИ, 1994. -302 с.
10. Зудин В.И. Финансовая математика: Учебное пособие. ТФ Рос. гос. торг. экон. ун-та., ТулГУ.- Тула, 2003.- 297 с.
11. Борисов А.Б. Большой экономический словарь. Изд. 2-е, перераб. и доп.- М.: Книжный мир,2007.- 860 с.
12. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. -М.: Приор, 1998.
13. Ковалев В.В. Сборник задач по финансовому анализу. - М.: Финансы и статистика, 1997. -128 с.

14. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. -М.: ИНФРА-М, 1997. -302 с.

15. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов. Пер. с сербского. -М.: Финансы и статистика, 1994. -268 с.

16. Кузнецов М.В., Овчинников А.С. Технический анализ рынка ценных бумаг. - М.: ИНФРА-М, 1996. -122 с.

17. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. - М.: Дело, 1998.

18. Малыхин В.И. Финансовая математика. Учеб. пособие для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. -247 с.

19. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям. - М.: Инфра-М, 1996.

20. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. Курс лекций и описание торговых сессий. Пер. с англ. - М.: Дело Лтд, 1995. -208 с.

21. Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. - М.: Инфра-М, 1994.

22. Словарь банковско-биржевой лексики на шести языках. - М.: МаксОР. Сост. Бобылев Ю.А., 1992. -288 с.

23. Уотшем Т.Дж., Паррамоу Л. Количественные методы в финансах. Пер. с англ. -М.: ЮНИТИ, 1998.

24. Федоров Б.Г. Англо-русский банковский энциклопедический словарь. -С-Пб.: Лимбус Пресс, 1995. -496 с.

25. Фондовые рынки США, основные понятия, механизмы, терминология. -М.: ООН, Церих-ПЭЛ, 1992. -184 с.

26. Фондовый портфель. Книга эмитента, инвестора, акционера. Книга биржевика. Книга финансового брокера. Отв. ред. Рубин Ю.Б., Солдаткин В.И. -М.: СОМИНТЭК, 1992. -752 с.

27. Ширяев А.Н. основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. -М.: Фазис, 1998.

**Интернет-ресурсы:**

http://www.dowjones.com/

http://www.nasdaq.com/

http://finance.yahoo.com/

http://www.rbc.ru/

http://www.quicken.com/

http://www.interstock.ru/

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ГЛОССАРИЙ

| № п/п | Содержание понятия | Содержание |
|---|---|---|
| 1 | **Актуарный метод расчета** | - один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. правило торговца) |
| 2 | **Аннуитет** | - см. финансовая рента |
| 3 | **Брутто-ставка** | - ставка процентов, скорректированная на инфляцию. |
| 4 | **Валюта** | 1. Денежная единица данного государства;<br>2) Тип денежной системы (золотая валюта, бумажная валюта и т. п.); 3) денежные знаки иностранных государств (банкноты, казначейские билеты, монеты), кредитные и платёжные документы (векселя, чеки и др.), выраженные в иностранных денежных средствах и используемые в международных расчётах. |
| 5 | **Внутренняя норма доходности** | - расчетная ставка процентов, применение которой к инвестициям порождает соответствующий поток доходов |
| 6 | **Дисконт или скидка** | - проценты в виде разности D=S-P, где S – сумма на конец срока, P – сумма на начало срока |
| 7 | **Дисконтный множитель** | - коэффициент, показывающий какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга (наращенной сумме) |
| 8 | **Дисконтирование суммы S** | - расчет ее текущей стоимости P |
| 9 | **Внутренняя норма доходности** | - расчетная ставка процентов, применение которой к инвестициям порождает соответствующий поток доходов |
| 10 | **Дисконт или скидка** | - проценты в виде разности D=S-P, где S – сумма на конец срока, P – сумма на начало срока |
| 11 | **Дисконтирование (суммы S)** | – расчет ее текущей стоимости P |
| 12 | **Дисконтный множитель** | - коэффициент, показывающий какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга (наращенной сумме) |
| 13 | **Индекс покупательной способности денег** | - показатель, определяемый как обратная величина индекса цен |
| 14 | **Индекс рентабельности** | - отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям |
| 15 | **Индекс цен** | - показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени |
| 16 | **Инфляционная премия** | - корректировка ставки процентов для компенсации обесценения денег |
| 17 | **Капитализация процентов** | - присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения |

| | | |
|---|---|---|
| 18 | **Контур финансовой операции** | - графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами |
| 19 | **Коэффициент наращения ренты** | - отношение наращенной суммы ренты к сумме её годовых платежей или к размеру отдельного платежа |
| 20 | **Коэффициент приведения ренты** | - отношение современной стоимости ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа |
| 21 | **Кредит** | - предоставление в долг денег или товаров на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов.<br>*Краткосрочный кредит* выдаётся на срок до года и предназначается для формирования оборотных средств предприятий.<br>*Долгосрочный кредит* выдаётся на срок свыше 1 года и используется как инвестиционный капитал. |
| 22 | **Математическое дисконтирование** | - вид дисконтирования, представляющий собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды |
| 23 | **Множитель наращения** | - коэффициент, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной |
| 24 | **Наращение или рост первоначальной суммы** | - процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга |
| 25 | **Наращенная сумма потока платежей** | - сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты |
| 26 | **Наращенная сумма ссуды** (долга, депозита, др. видов инвестированных средств) | - первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока |
| 27 | **Переменная рента** | - рента с изменяющимися членами. |
| 28 | **Период начисления** | - интервал времени, к которому относится (применяется) процентная ставка |
| 29 | **Период ренты** | - временной интервал между двумя соседними платежами |
| 30 | **Поток платежей** | - ряд последовательных выплат и поступлений |
| 31 | **Постоянная рента** | - рента с равными членами |
| 32 | **Правило торговца** | - один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. актуарный метод расчета) |
| 33 | **Практика расчета** | - различают 3 варианта расчета: 1) точные проценты с точным числом дней ссуды (британская практика); |

| | | |
|---|---|---|
| | **простых процентов** | 2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (франц.практика); 3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская практика) |
| 34 | **Приведение** | это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени; если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то - наращение |
| 35 | **Принцип неравноценности денег** | - деньги, относящиеся к разным моментам времени имеют различную текущую стоимость |
| 36 | **Процент обыкновенный** или **коммерческий** | получают, когда за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом) |
| 37 | **Процентная ставка** | - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби |
| 38 | **Реинвестирование** | - неоднократное повторение процесса инвестирования *суммы* депозита вместе с начисленными на нее в предыдущем периоде процентами |
| 39 | **Рента** | - регулярно получаемый годовой доход с капитала, земли, имущества, не требующий от получателя предпринимательской деятельности. |
| 40 | **Рента верная** | - рента, члены которой подлежат безусловной выплате |
| 41 | **Рента немедленная** | - рента, срок которой начинается немедленно |
| 42 | **Рента отложенная** | - рента, начало срока которой запаздывает |
| 43 | **Рента постнумерандо** или **обычная рента** | - рента, платежи которой осуществляются в конце каждого периода |
| 44 | **Ссуда** | - займ, кредит, как правило, с уплатой процентов и на определённый срок. |
| 45 | **Член ренты** | - величина каждого отдельного платежа ренты |
| 46 | **Финансовая рента или аннуитет** | - поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны |
| 47 | **Финансовая математика (ФМ)** | – метод определения стоимости денежных средств при их передаче в пользование другим лицам. Основная задач а ФМ - приведение денежных платежей в соответствие с условиями финансовой сделки. Её решение основывается на понятии будущей и современной «стоимости денег», на применении декурсивной и антисипативной ставок банка, на определении величины ренты. |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2: Вопросы для подготовки к экзамену

1. Предмет изучения финансовой математики. Время как фактор стоимости в финансовых расчетах.
2. Простые проценты и процентные ставки (ставка процента и учетная ставка). Формула наращения по простым процентам. Практика начисления простых процентов. Простые переменные ставки. Реинвестирование по простым процентам.
3. Дисконтирование и учет по простым ставкам. Сопоставление ставки наращения и учетной ставки. Примеры, задачи
4. Конвертация валюты и начисление простых процентов. Расчет доходности операций с двойной конвертацией.
5. Определение критических точек. Движение денежных средств на расчетном счете и банковская практика расчета процентов. Определение суммы, выдаваемой при закрытии счета.
6. Методы расчетов при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (актуарный метод и метод торговца).
7. Сопоставление процентных ставок при различных условиях контрактов. Объявленная ставка и реальная доходность кредитора в потребительском кредите
8. Ставка сложных процентов. Формула наращения по сложным процентам**.** Сравнение наращенных величин при применении ставок простых и сложных процентов для различных периодов времени.
9. Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени. Формула удвоения суммы. Три метода начисления процентов при дробном числе лет.
10. Номинальная и эффективная ставки процентов. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов и сложной учетной ставке. Номинальная и эффективная учетные ставки процентов. Примеры, задачи
11. Конвертация валюты и начисление сложных процентов. Расчет доходности. Определение критических точек. Расчеты простых и сложных процентов в условиях инфляции (брутто-ставки и ставки реального наращения).
12. Учет налогов. Расчет средней ставки (доходности) за период в случае переменных ставок простых и сложных процентов. Расчет средней ставки при одновременном участии в нескольких операциях с разными условиями.
13. Расчет срока ссуды и процентных ставок. Примеры.
14. Непрерывные проценты. Сила роста. Наращение и дисконтирование. Рассмотрение частного случая, когда сила роста меняется скачком. Вывод формулы для произвольного закона изменения силы роста. Связь дискретных и непрерывных процентных ставок
15. Эквивалентность процентных ставок Формулы, устанавливающие эквивалентность между различными видами ставок. Конверсия платежей, изменение условий контрактов. Примеры, задачи. Кривая доходности

16. Финансовые ренты (аннуитеты) Потоки платежей. Определение финансовой ренты и ее параметров. Виды ренты, различные принципы классификации. Вывод формул для расчета наращенной (будущей) и современной (текущей) стоимости обычной ренты постнумерандо.
17. Вывод формул для различного числа платежей в году и для различной частоты начисления процентов. Определение других параметров ренты (размера платежа, срока, процентной ставки).
18. Другие виды ренты: пренумерандо, отсроченная рента, вечная рента. Расчет ренты при переменной ставке процентов.
19. Расчетные задачи по определению параметров ренты. Конверсия аннуитетов. Изменение условий контрактов. Расчет кривой доходности, форвардных (наведенных) ставок
20. Долгосрочные кредиты. Расходы по обслуживанию долгосрочных кредитов. Планирование погасительного фонда. Погашение кредита в рассрочку. Льготные займы и кредиты. Грант-элемент. Реструктурирование займа. Полная доходность кредитной операции. Баланс финансово-кредитной операции.
21. Доходность ссудных и учетных операций с удержанием комиссионных. Доходность купли-продажи финансовых инструментов. Доходность потребительского кредита. Коммерческий кредит, сравнение коммерческих контрактов и условий кредита. Рейтинг контрактов. Определение предельных значений параметров контракта, обеспечивающих конкурентоспособность.
22. Виды ипотечных ссуд. Стандартная ипотека. Нестандартные ипотеки. План (график) погашения долга. Расчетные примеры
23. Показатели эффективности производственных инвестиций. Чистый приведенный доход. Срок окупаемости. Внутренняя норма доходности. Рентабельность. Достоинства и недостатки этих критериев.
24. Аренда оборудования (лизинг). Виды лизинга. Расчет платежей по лизингу
25. Льготные займы и кредиты. Абсолютный грант-элемент. Относительный грант-элемент

ПРИЛОЖЕНИЕ 3: Задачи для подготовки к экзамену

| № задачи | Содержание задач |
|---|---|
| Задача 1 | Определить множитель наращения процентов для ссуды, выданной на 4 года, если договорная базовая процентная ставка 15 % годовых. Маржа на первый год составляет 0,5 %, а на последующие периоды –1%. |
| Задача 2 | Определить множитель наращения процентов для ссуды, выданной на 5 лет, если договорная базовая процентная ставка 16 % годовых. Маржа на первый год не назначается, на 2-й и 3-й периоды она составляет 0,5 %, а на последующие периоды –1%. |
| Задача 3 | Какой величины достигнет долг, равный 500 тыс. руб., через 3 года при росте по сложной ставке 12 % годовых? |
| Задача 4 | Какой величины достигнет долг, равный 200 тыс. руб., через 3,5 года при росте по сложной ставке 10 % годовых? |
| Задача 5 | Долг клиента составляет 1 млн. руб. Начисление процентов осуществляется по сложной ставке 12 % годовых. Какой величины достигнет долг через 2 года а) при годовом и б) поквартальном начислении процентов? |
| Задача 6 | Долговое обязательство на сумму 3 млн. руб., срок оплаты которого наступает через 4 года, продано с дисконтом по сложной учётной ставке 12 % годовых. Какова величина полученной за долг суммы и величина дисконта? |
| Задача 7 | Требуется найти величину простой учётной ставки (К=360), которая эквивалентна годовой процентной ставке 25 % (К=365) при условии, что срок учёта равен 210 дням. |
| Задача 8 | В договоре, рассчитанном на 1 год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 12 % годовых, а на каждый последующий на 2% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращения за весь срок договора. |
| Задача 9 | Ссуда в размере 500 000 руб. выдана 21.01 до 06.10 включительно под 15% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? Точное число дней ссуды - 258, а приближённое 255. Определить обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды и обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды. |
| Задача 10 | Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100 000 руб., а срок долга - 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых. |
| Задача 11 | В договоре, рассчитанном на 4 года, принята ставка простых процентов на первый год в размере 20 % годовых, а на каждый последующий год - на 2% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращения за весь срок договора. |
| Задача 12 | Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 200 000 руб., а срок долга – 2,5 года при ставке простых процентов, равной 12% годовых. |

| | |
|---|---|
| Задача 13 | Ссуда в размере 200 000 руб. выдана 21.01 до 06.10 включительно под 12 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? Точное число дней ссуды - 258. Определить точные проценты с точным числом дней ссуды и обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. |
| Задача 14 | Требуется проверить эквивалентность двух разновременных платежей. Условия первого платежа: выплатить **500** тыс. руб. через 5 месяцев; условия второго платежа: выплатить **600** тыс. руб. через 10 месяцев. При дисконтировании применить простую ставку, равную 25 %. |
| Задача 15 | Требуется проверить эквивалентность двух разновременных платежей. Условия первого платежа: выплатить **900** тыс. руб. через 3 месяцев; условия второго платежа: выплатить **1000** тыс. руб. через 12 месяцев. При дисконтировании применить простую ставку, равную 12 %. |
| Задача 16 | В договоре, рассчитанном на 1 год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 12 % годовых, а на каждый последующий на 2% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращения за весь срок договора. |
| Задача 17 | Ссуда в размере 500 000 руб. выдана 21.01 до 06.10 включительно под 15% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? Точное число дней ссуды - 258, а приближённое 255. Определить обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды и обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды. |
| Задача 18 | Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100 000 руб., а срок долга - 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых. |
| Задача 19 | В договоре, рассчитанном на 4 года, принята ставка простых процентов на первый год в размере 20 % годовых, а на каждый последующий год - на 2% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращения за весь срок договора. |
| Задача 20 | Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 200 000 руб., а срок долга – 2,5 года при ставке простых процентов, равной 12% годовых. |
| Задача 21 | Ссуда в размере 200 000 руб. выдана 21.01 до 06.10 включительно под 12 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? Точное число дней ссуды - 258. Определить точные проценты с точным числом дней ссуды и обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. |
| Задача 22 | Определить множитель наращения процентов для ссуды, выданной на 4года, если договорная базовая процентная ставка 15 % годовых. Маржа на первый год не назначается, на 2-й период она составляет 1,0 %, а на последующие периоды – 2,0%. |
| Задача 23 | Какой величины достигнет долг, равный 500 тыс. руб., через 3 года при росте по сложной ставке 12 % годовых? |
| Задача 24 | Два платежа размером 250 и 500 тыс. руб. со сроками уплаты соответственно 120 и 180 дней объединяются в один со сроком 240 дней. Определить консолидированную сумму долга в случае применения при конверсии простой ставки, равной15 %. |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4: Тесты по учебной дисциплине

### Задачи финансовой математики. Простые проценты

1. Что означает принцип финансовой неравноценности денег, относящихся к различным моментам времени?
   а) обесценение денег в связи с инфляцией;
   б) возрастание риска с увеличением срока ссуды;
   в) возможность инвестировать деньги с целью получить доход;
   г) снижение себестоимости товаров в связи с научно-техническим прогрессом.

2. Укажите возможные способы измерения ставок процентов
   а) только процентами;
   б) только десятичной дробью;
   в) только натуральной дробью с точностью до 1/32;
   г) процентами, десятичной или натуральной дробью.

3. Укажите формулу наращения по простым процентам.
   а) $S = P(1 + ni)$;
   б) $S = P(1 - nd)$;
   в) $P = S(1 - ni)^{-1}$;
   г) $P = S(1 - nd)^{-1}$

4. В чем сущность французской практики начисления простых процентов?
   а) в использовании обыкновенных процентов и приближенного срока ссуды;
   б) в использовании точных процентов и приближенного срока ссуды;
   в) в использовании точных процентов и точного срока ссуды;
   г) в использовании обыкновенных процентов и точного срока ссуды.

5. В чем сущность германской практики начисления простых процентов?
   а) в использовании обыкновенных процентов и приближенного срока ссуды;
   б) в использовании точных процентов и приближенного срока ссуды;
   в) в использовании точных процентов и точного срока ссуды;
   г) в использовании обыкновенных процентов и точного срока ссуды.

6. В чем сущность британской практики начисления простых процентов?
   а) в использовании обыкновенных процентов и приближенного срока ссуды;
   б) в использовании точных процентов и приближенного срока ссуды;
   в) в использовании точных процентов и точного срока ссуды;
   г) в использовании обыкновенных процентов и точного срока ссуды.

7. Укажите формулу расчета наращенной суммы, когда применяется простая ставка, дискретно изменяющаяся во времени

а) $S = P(1 - n_1 d_1)(1 - n_2 d_2)...(1 - n_k d_k)$;

б) $S = P(1 - n_1 d_1)^{-1}(1 - n_2 d_2)^{-1}...(1 - n_k d_k)^{-1}$;

в) $S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_k i_k)$;

г) $S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)...(1 + n_k i_k)$.

8. Укажите формулу расчета наращенной суммы в операции с реинвестированием под дискретно изменяющуюся простую ставку процентов

а) $S = P(1 - n_1 d_1)(1 - n_2 d_2)...(1 - n_k d_k)$;

б) $S = P(1 - n_1 d_1)^{-1}(1 - n_2 d_2)^{-1}...(1 - n_k d_k)^{-1}$;

в) $S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_k i_k)$;

г) $S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)...(1 + n_k i_k)$.

9. Укажите формулу математического дисконтирования в случае применения простой процентной ставки

а) $P = S(1 + ni)^{-1}$;

б) $S = P(1 - ni)$;

в) $S = P(1 - dn)$;

г) $P = S(1 - dn)$.

10. Укажите формулу банковского учета по простой процентной ставке.

а) $P = S(1 + ni)^{-1}$;

б) $S = P(1 - ni)$;

в) $S = P(1 - dn)$;

г) $P = S(1 - dn)$.

## Сложные проценты

1. Укажите формулу, по которой вычисляется срок удвоения первоначальной суммы при применении сложных процентов.

а) $n = 1/i$;

б) $n = 0{,}7/i$;

в) $n = 0{,}5/i$;

г) $n = 0{,}3/i$.

2. Укажите формулу наращения по сложным процентам.

а) $S = Pn(1 + i)$;

б) $S = P^n(1 + i)$;

в) $S = P(1 + i)^n$;

г) $S = P(1 + ni)^n$.

3. Как вычисляется наращенная сумма при применении сложных процентов, если ставка дискретно меняется во времени?

а) $S = P^{n_1 n_2 \dots n_k}(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_k)$;

б) $S = P(1+i_1^{n_1})(1+i_2^{n_2})\dots(1+i_k^{n_k})$;

в) $S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_k)^{n_k}$;

г) $S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\dots(1+n_k i_k)$.

4. Укажите формулу математического дисконтирования по сложной ставке

а) $P = S(1+i)^{-n}$;

б) $P = S(1-nd)$;

в) $P = S(1-ni)^{-1}$;

г) $P = S(1-d)^{-n}$.

5. Укажите формулу банковского учета по сложной учетной ставке

а) $P = S(1+i)^{-n}$;

б) $P = S(1-nd)$;

в) $P = S(1-ni)^{-1}$;

г) $P = S(1-d)^{-n}$.

6. Какая из формул верно определяет сложную учетную ставку?

$$d = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n} - 1;$$

$$d = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1;$$

$$d = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n};$$

$$d = 1 - \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n};$$

7. Какая из формул верно определяет сложную ставку?

а) $i = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n} - 1$;

б) $i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1$;

в) $i = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n}$;

г) $i = 1 - \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n}$.

8. Какая из формул верно определяет номинальную сложную учетную ставку?

а) $f = m\left[1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{mn}}\right]$;

б) $f = m\left[\left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right]$;

в) $f = m\left[1 - \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}}\right]$;

г) $f = m\left[\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right]$.

9. Какая формула верно отражает связь между сложной номинальной учетной ставкой и сложной годовой учетной ставкой?

а) $f = m\left[(1-d)^{1/m} - 1\right]$;

б) $f = m\left[(1-d)^{n/m} - 1\right]$;

в) $f = m\left[1 - (1-d)^{n/m}\right]$;

г) $f = m\left[1 - (1-d)^{1/m}\right]$.

10. Какая формула верно определяет силу роста?

а) $\delta = \frac{1}{n}\log\left(\frac{S}{P}\right)$;

б) $\delta = \frac{1}{n}\lg\left(\frac{S}{P}\right)$;

в) $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{S}{P}\right)$;

г) $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{P}{S}\right)$.

## Производные процентные расчёты. Начисление процентов в условиях инфляции и налогообложения

1. Как определяется брутто ставка простых процентов r по реальной ставке i и индексу цен $J_p$?

а) $r = \frac{1+ni}{J_p} - 1$;

б) $r = \left(1 + \frac{ni}{J_p}\right) - 1$;

в) $r = \frac{1+ni}{J_p}$;

г) $r = \frac{(1+ni)J_p - 1}{n}$.

2. Как определяется брутто - ставка сложных процентов r по реальной ставке i и темпу инфляции h?

*а)* $r = i + h + ih$ ;

*б)* $r = i + h$ ;

*в)* $r = i - h$ ;

*г)* $r = i/(1 + h)$.

3. Как определяется инфляционная премия при начислении простых процентов?

а) $\frac{(S - P)}{J_p}$;

б) $\frac{S}{PJ_p}$;

в) $r - i$;

г) $r - \left(\sqrt[n]{J_p} - 1\right)$.

4. Как определяется инфляционная премия при начислении сложных процентов?

а) $h + ih$;

б) $r - \left(\sqrt[n]{J_p} - 1\right)$;

в) $h$;

г) $\frac{S}{PJ_p}$

5. Как годовой темп инфляции (прироста цен) h связан с индексом цен Jp за срок n?

а) $h = J_p - 1$;

б) $h = \sqrt[n]{J_p} - 1$;

в) $h = J_p^{\,n} - 1$;

г) $h = (J_p - 1)^n$.

6. Как индекс покупательной способности денег связан с индексом цен?

а) $J_{пс} = J_p - 1$;

б) $J_{пс} = \frac{1}{J_p}$;

в) $J_{пс} = \frac{1}{J_p - 1}$; г) $J_{пс} = \frac{1}{J_p / n}$.

7. Цены выросли за квартал в 1,2 раза. Какому годовому индексу цен соответствует такой темп?

а) $(1{,}2 - 1)4 + 1 = 1{,}8$;

б) $1{,}2^4 = 2{,}0736$;

в) $\sqrt[4]{1.2} = 1{,}0466$;

г) $1{,}2^4 - 1 = 1{,}0736$.

8. Как измеряется реальная ставка простых процентов при годовом темпе инфляции h?

а) $i = \frac{1}{n}\left[\frac{1+nr}{(1+h)^n} - 1\right]$;

б) $i = \sqrt[n]{\left[\frac{1+nr}{(1+h)^n} - 1\right]}$;

в) $i = \frac{1}{n}\left[1+n\left(\frac{r}{h}\right)\right]$;

г) $i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+r}{1+h} - 1\right)$.

9. Как измеряется реальная ставка сложных процентов при годовом темпе инфляции h?

а) $i = \frac{r-h}{1-h}$;

б) $i = \frac{r-h+rh}{1+h}$;

в) $i = \frac{r-h-rh}{1+h}$;

г) $i = \frac{r-h}{1+h}$.

10. Чему равен налог за год t при начислении сложных процентов, если налоговая ставка равна g?

а) $P\left[(l+i)^t - (l+i)^{t-1}\right]g$;

б) $Pg(l+i)^t$;

в) $Pg^t(l+i)$;

г) $P[g(l+i)]^t$.

## Потоки платежей. Постоянные финансовые ренты

1. Что такое рента постнумерандо?
а) рента, образуемая платежами после некоторого указанного момента времени;
б) рента, платежи которой поступают в конце каждого периода;
в) рента, платежи которой скорректированы с учетом инфляции;
г) рента, платежи которой скорректированы на величину налога.

2. Что такое рента пренумерандо?
а) рента, образуемая платежами до некоторого указанного момента времени;
б) рента, платежи которой поступают в начале каждого периода;
в) рента, платежи которой поступают до корректировки на инфляцию;
г) рента, платежи которой поступают до корректировки на величину налога.

3. Что такое p-срочная рента?
а) рента со сроком p лет;
б) рента с периодом начисления процентов p лет;
в) рента с p платежами в году;

г) рента с р начислениями процентов в году.

4. Как связаны между собой современная величина и наращенная сумма ренты?

а) $\dot{A}(l+i)^n = S$;

б) $An(l+i) = S$;

в) $Ani = S$;

г) $A = Si^n$.

5. Укажите коэффициент наращения обычной годовой ренты при однократном начислении процентов в году.

а) $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$;

б) $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$;

в) $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p}}$;

г) $\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p}}$

6. Укажите коэффициент приведения обычной годовой ренты при однократном начислении процентов в году.

а) $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$;

б) $\frac{1-(1+i)^n}{i}$;

в) $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+l)^{m/p}}$;

г) $\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/n}}$.

7. Укажите коэффициент наращения обычной р-срочной ренты при m – кратном начислении процентов в году в общем случае.

а) $\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$;

б) $\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$;

в) $\dfrac{\left(1-\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$;

г) $\dfrac{1-\left(1-\dfrac{j}{m}\right)^{mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$.

8. Укажите коэффициент приведения обычной p- срочной ренты при m-кратном начислении процентов в году в общем случае

а) $\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$;

б) $\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$;

в) $\dfrac{\left(1-\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$;

г) $\dfrac{1-\left(1-\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$.

9. Укажите формулу определения срока обычной годовой ренты при однократном начислении процентов в году

а) $\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$;

б) $\dfrac{-\ln\left(1-\dfrac{S}{R}i\right)}{\ln(1+i)}$;

в) $\dfrac{-\ln\left(\dfrac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$;

г) $\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R_i}+1\right)}{\ln(1+i)}$.

10. Укажите формулу линейной интерполяции

а) $i = i_i - \dfrac{a-a_i}{a_a-a_i}(i_a-i_i)$;

б) $i = i_i + \dfrac{a-a_i}{a_a-a_i}(i_a-i_i)$;

в) $i = i_i - \dfrac{a-a_i}{a_a-a_i}(i_i-i_a)$;

г) $i = i_a - \dfrac{a-a_i}{a_a-a_i}(i_a-i_i)$.

**Практические приложения теории финансовой математики**

1. Укажите множитель наращения краткосрочной операции с двойной конвертацией валют по схеме СКВ→Руб.→Руб.→СКВ.

а) $(1+ni)\dfrac{K_0}{K_1-K_0}$;

б) $(1+ni)\dfrac{K_1-K_0}{K_0}$;

в) $(1+ni)\dfrac{K_0}{K_1}$;

г) $(1+ni)\dfrac{K_1}{K_0}$.

2. Укажите функциональную связь между годовой эффективностью I эфф. краткосрочной операции с двойной конвертацией по схеме СКВ→Руб.→Руб.→СКВ с темпом роста обменного курса за срок операции k

а) $i_{эфф} = \dfrac{1+ni}{kn}$;

б) $i_{эфф} = \dfrac{1+ni}{n} - \dfrac{1}{k}$;

в) $i_{эфф} = \dfrac{1+ni-k}{kn}$;

г) $i_{эфф} = \dfrac{1+ni}{k} - \dfrac{1}{n}$.

3. Каково критическое значение темпа роста обменного курса валют за срок операции k, при котором эффективность операции оказывается равной нулю, если речь идет о краткосрочной операции по схеме СКВ→Руб.→Руб.→СКВ?

а) $1+ni$;

б) $(1+ni)^{1/n}$;

в) $(1+ni)/n$;

г) $(1+ni)^{n}$.

4. Каково максимальное допустимое значение курса обмена К1 в конце операции по схеме СКВ→Руб.→Руб.→СКВ, при котором краткосрочный депозит в рублях или в валюте одинаково эффективен

а) $K_0\left(1+n\dfrac{i}{j}\right)$;

б) $K_0\left(1+n\dfrac{j}{i}\right)$;

в) $K_0\dfrac{1+nj}{1+ni}$;

г) $K_0\dfrac{1+ni}{1+nj}$.

5. Укажите множитель наращения краткосрочной операции с двойной конвертацией валют по схеме Руб.→СКВ→СКВ→Руб.

а) $(1+ni)\dfrac{K_1}{K_0}$;

б) $(1+nj)\dfrac{K_0}{K_1}$;

в) $(1+nj)\dfrac{K_1}{K_0}$; г) $(1+ni)\dfrac{K_0}{K_1}$.

6. Укажите функциональную связь между годовой эффективностью I эфф. краткосрочной операции с двойной конвертацией по схеме Руб.→СКВ→СКВ→Руб. с темпом роста k обменного курса за срок операции

а) $i_{эфф}=\dfrac{k(1+nj)-1}{kn}$;

б) $i_{эфф}=\dfrac{k(1+nj)-1}{n}$;

в) $i_{эфф}=\dfrac{k(1+nj)-k}{n}$;

г) $i_{эфф}=\dfrac{k(1+nj)}{kn}$.

7. Каково критическое значение темпа роста обменного курса валют за срок операции k, при котором эффективность операции оказывается равной нулю, если речь о краткосрочной операции по схеме Руб.→СКВ→СКВ→Руб.?

а) $\frac{1}{1+nj}$;

б) $\frac{1}{1+ni}$;

в) $\frac{1+ni}{1+nj}$;

г) $\frac{1+nj}{1+ni}$.

8. Каково минимально допустимое значение курса обмена K1 в конце операции по схеме $\boxed{\text{Руб.}\rightarrow\text{СКВ}\rightarrow\text{СКВ}\rightarrow\text{Руб.}}$, при котором краткосрочный депозит в рублях или в валюте одинаково эффективен.

а) $K_0\frac{1+nj}{1+ni}$;

б) $K_0\left(1+n\frac{i}{j}\right)$;

в) $K_0\frac{1+ni}{1+nj}$;

г) $K_0\left(1+n\frac{j}{i}\right)$.

9. Если при погашении краткосрочной задолженности частями сумма платежа меньше суммы процентов, начисленных на эту дату, то в актуарном методе:

а) платеж погашает соответствующую часть начисленных процентов, а оставшаяся часть процентов идет на увеличение суммы долга;

б) платеж не учитывается, а присоединяется к следующему платежу;

в) платеж не учитывается, но вместе с начисленными на него процентами присоединяется к следующему платежу;

г) платеж сначала не учитывается, но затем вместе с начисленными на него по заниженной (заранее оговоренной) ставке процентами присоединяется к следующему платежу.

10. При движении денежных средств на расчетном счете и расчете простых процентов сумма процентов к моменту закрытия счета рассчитывается как:

а) сумма процентных чисел, деленная на постоянный делитель;

б) взвешенная сумма процентных чисел, с весами, определяемыми суммами на расчетном счете, деленная на постоянный делитель;

в) взвешенная сумма процентных чисел, с весами, определяемыми периодами постоянства сумм на расчетном счете, деленная на постоянный делитель;

г) взвешенная сумма процентных чисел, с весами, определяемыми произведением суммы на расчетном счете на интервал постоянства счета в днях, деленная на постоянный делитель.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5: Справочная информация

Таблица 1: Принятые обозначения в формулах финансовой математики

| Наименование показателя | Принятое обозначение | Другие возможные варианты обозначений |
|---|---|---|
| *Стоимостные параметры (характеристики) финансовых операций* | | |
| Исходная сумма (современная стоимость наращенной суммы) | **P** | **PV** |
| Современная стоимость потока платежей | **A** | **S(0); PVf** |
| Чистый приведенный доход (стоимость) | **N** | **NPV** |
| Исходная сумма в другой валюте | $\mathbf{P}_{v}$ | - |
| Исходная сумма в рублях | $\mathbf{P_r}$ | - |
| Наращенная сумма | **S** | **FV; F;** $\mathbf{F}_n$ |
| Наращенная стоимость ренты | **S** | $\mathbf{S}_n$ **S(T);** $\mathbf{P}_n$**; FVf** |
| Наращенная сумма в другой валюте | $\mathbf{S}_{v}$ | - |
| Наращенная сумма в рублях | $\mathbf{S_r}$ | - |
| Наращенная сумма с учетом инфляции | **C** | $\mathbf{FV_1}$ |
| Наращенная сумма после уплаты налога | $\mathbf{S_н}$ | **S”** |
| Абсолютная величина начисленных процентов | **I** | $\mathbf{I_n}$; $\mathbf{I_{d.r}}$ |
| Абсолютная величина дисконта | **D** | $\mathbf{D_{r,d}}$ |
| Абсолютная величина налога | **G** | - |
| Величина платежа (члена потока) для потока платежей | **R** | - |
| *Показатели отношения стоимостных параметров финансовых операций* | | |
| Простая процентная ставка наращения | $\mathbf{i_s}$ | **i**; $\mathbf{i_n}$ |
| Простая учетная процентная ставка | $\mathbf{d_s}$ | **d;** $\mathbf{d_п}$ |
| Сложная эффективная (реальная) процентная ставка наращения | **i** | $\mathbf{i_{эф}}$**, r;** $\mathbf{r_{ef}}$**,** $\mathbf{r_1}$**, f** |
| Сложная номинальная процентная ставка наращения | **j** | **I** |
| Сложная эффективная (реальная) учетная процентная ставка | **d** | $\mathbf{d_c}$; $\mathbf{d_t}$ |
| Сложная номинальная учетная процентная ставка | **f** | - |
| Постоянная сила роста | $\boldsymbol{\delta}$ | - |
| Переменная сила роста | $\boldsymbol{\delta_t}$ | - |
| Постоянный прирост (темп роста) силы роста | $\boldsymbol{a_\delta}$ | $\boldsymbol{a}$ |
| Непрерывный прирост (темп роста) силы роста | $\gamma$ | - |
| Процентная ставка наращения для СКВ | $\mathbf{i_{СКВ}}$ | **j** |
| Положительная ставка процента (при учете инфляции) | **i** | - |
| Брутто-ставка (при учете инфляции) | r | $\bar{r}$ |
| Ставка налога на проценты | **g** | **R; q** |
| Множитель (коэффициент) наращения по простым процентам | $\mathbf{q_п}$ | $\mathbf{K_H}$**;** $\mathbf{B_t}$ |
| Множитель (коэффициент) наращения по сложным процентам | $\mathbf{q_c}$ | $\mathbf{K_{нс}}$; $\mathbf{M_{(n,i)}}$; $\mathbf{f_{ni}}$**,** $\mathbf{B_t}$ |

| Наименование показателя | Принятое обозначе-ние | Другие возможные варианты обозначений |
|---|---|---|
| Дисконтный множитель по простым процентам | $\boldsymbol{\upsilon}$ | $\gamma_i$; $\boldsymbol{\upsilon_t}$ |
| Дисконтный множитель по сложным процентам | $\boldsymbol{\upsilon_n}$ | $\gamma_2$, $\mathbf{Dis_{(n.d)}}$; $\mathbf{f_{nd}}$; $\boldsymbol{\upsilon_t}$ |
| Коэффициент наращения ренты | $\mathbf{s_n}$ | **ff** |
| Коэффициент приведения ренты | $\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}}$ | $\mathbf{f_p}$ |
| Величина постоянного абсолютного прироста платежа ренты | ***a*** | |
| Величина постоянного относительного прироста платежа ренты | **к** | **-** |
| Величина темпа роста величины платежа ренты | **q** | **-** |
| Индекс покупательной способности денег (при учете инфляции) | $\mathbf{J_c}$ | $\mathbf{I_{nc}}$ |
| Индекс потребительских цен (при учете инфляции) | $\mathbf{J_p}$ | $\mathbf{I_{nc}}$, $\mathbf{I_p}$ |
| Темп инфляции | **H** | $\mathbf{I_{nf}}$ |
| Среднегодовой темп роста цен | $\boldsymbol{i}_{\mathbf{p}}$ | $\mathbf{I_p}$ |
| Среднегодовой темп инфляции | **h** | $\boldsymbol{\tau_r}$; $\mathbf{h_t}$ |
| Курс обмена валют в начале операции (обменный) | $\mathbf{K_o}$ | **-** |
| Курс обмена валют в конце операции (обменный) | $\mathbf{K_1}$ | **-** |
| Индекс курсов валют | **k** | **-** |
| Дивизор (процентный ключ, постоянный делитель) | **Д** | **D'** |
| *Показатели временных параметров финансовых операций* | | |
| Число периодов (срок) финансовой операции в годах | **n** | ***T; N; l*** |
| Число дней операции | **T** | ***∂;*** **t** |
| Число дней в году (временная база) | **K** | **Y** |
| Число начислений процентов в году | **m** | **-** |
| Число платежей в году (для финансовой ренты) | $\rho$ | $\rho$ |

## Таблица 2.Основные зависимости и параметры простых и сложных финансовых операций при начислении процентов

| Процесс | | Вид операции по начислению процентов | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Простые проценты | Сложные проценты | |
| | | | По эффективной ставке | По номинальной ставке |
| Наращение | | $S=P(1+ni_s)$ | $S=P(1+i)^n$ | $S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$ |
| | | $n=\frac{S-P}{Pi_s}$ | $n=\frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)}$ | $n=\frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ |
| | | $i_s=\frac{S-P}{Pn}$ | $i=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1$ | $j=m\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}}-1\right)$ |
| Дисконтирование | Математическое дисконтирование | $P=\frac{S}{1+ni_s}$ | $P=\frac{S}{(1+i)^n}$ | $P=\frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}$ |
| | | $n=\frac{S-P}{Pi_s}$ | $n=\frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)}$ | $n=\frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ |
| | | $i_s=\frac{S-P}{Pn}$ | $i=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1$ | $j=m\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}}-1\right)$ |
| | Банковский учет | $P=S(1-nd_s)$ | $P=S(1-d)^n$ | $P=S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}$ |
| | | $n=\frac{S-P}{Sd_s}$ | $n=\frac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{\ln(1-d)}$ | $n=\frac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{m\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)}$ |
| | | $d_s=\frac{S-P}{Sn}$ | $d=1-\sqrt[n]{\frac{P}{S}}$ | $f=m\left(1-\sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right)$ |

## Таблица 2. Эквивалентные зависимости между различными видами процентных ставок

| Виды ставок | | Простые проценты | | Сложные проценты | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $i_s$ | $d_s$ | $i$ | $j$ | $d$ | $f$ |
| Простые проценты | $i_s$ | — | $d_s=\frac{i_s}{1+ni_s}$ | $i=\sqrt[n]{1+ni_s}-1$ | $j=m\left(\sqrt[mn]{1+ni_s}-1\right)$ | $d=1-\sqrt[n]{\frac{1}{1+ni_s}}$ | $f=m\left(1-\sqrt[mn]{\frac{1}{1+ni_s}}\right)$ |
| | $d_s$ | $i_s=\frac{d_s}{1-nd_s}$ | — | $i=\sqrt[n]{\frac{1}{1-nd_s}}-1$ | $j=m\left(\sqrt[mn]{\frac{1}{1-nd_s}}-1\right)$ | $d=1-\sqrt[n]{1-nd_s}$ | $f=m\left(1-\sqrt[mn]{1-nd_s}\right)$ |
| Сложные проценты | $i$ | $i_s=\frac{(1+i)^n-1}{n}$ | $d_s=\frac{(1+i)^n-1}{n(1+i)^n}$ | — | $j=m\left(\sqrt[m]{1+i}-1\right)$ | $d=\frac{i}{1+i}$ | $f=m\left(1-\sqrt[m]{\frac{1}{1+i}}\right)$ |
| | $j$ | $i_s=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}$ | $d_s=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}$ | $i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$ | — | $d=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}$ | $f=\frac{j}{1+\frac{j}{m}}$ |
| | $d$ | $i_s=\frac{1-(1-d)^n}{n(1-d)^n}$ | $d_s=\frac{1-(1-d)^n}{n}$ | $i=\frac{d}{1-d}$ | $j=m\left(\sqrt[m]{\frac{1}{1-d}}-1\right)$ | — | $f=m\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right)$ |
| | $f$ | $i_s=\frac{1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}{n\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}$ | $d_s=\frac{1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}{n}$ | $i=\frac{1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^m}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^m}$ | $j=\frac{f}{1-\frac{f}{m}}$ | $d=1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^m$ | — |

**Таблица 3 Основные зависимости для специальных финансовых операций, связанных с начислением процентов**

| Вид операций по начислению процентов | Вид специальной финансовой операции | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Налог на проценты | Инфляция | Конверсия валют: СКВ→Руб→Руб→СКВ | Конверсия валют: Руб→СКВ→СКВ→Руб |
| Простые проценты | $S_н = P[1+n(1-g)i_s]$ | $C = P\frac{1+ni_s}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n}$ | $S_v = P_v K_0 * (1+ni_s) * \frac{1}{K_1}$ | $S_r = \frac{P_r}{K_0} * (1+ni_{sСКВ}) * K_1$ |
| | | $r = \frac{(1+ni_s)\left(1+\frac{h}{100}\right)^n - 1}{n}$ | | |
| | $G = Pni_s g$ | $i_s = \frac{\frac{1+nr}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n} - 1}{n}$ | | |
| Сложные проценты (по эффективной ставке) | $S_н = P[(1-g)(1+i)^n + g]$ | $C = P\frac{(1+i)^n}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n}$ | $S_v = P_v K_0 * (1+i)^n * \frac{1}{K_1}$ | $S_r = \frac{P_r}{K_0} * (1+i_{СКВ})^n * K_1$ |
| | | $r = i + \frac{h}{100} + i\frac{h}{100}$ | | |
| | $G = P[(1+i)^n - 1]g$ | $i = \frac{1+r}{1+\frac{h}{100}} - 1$ | | |

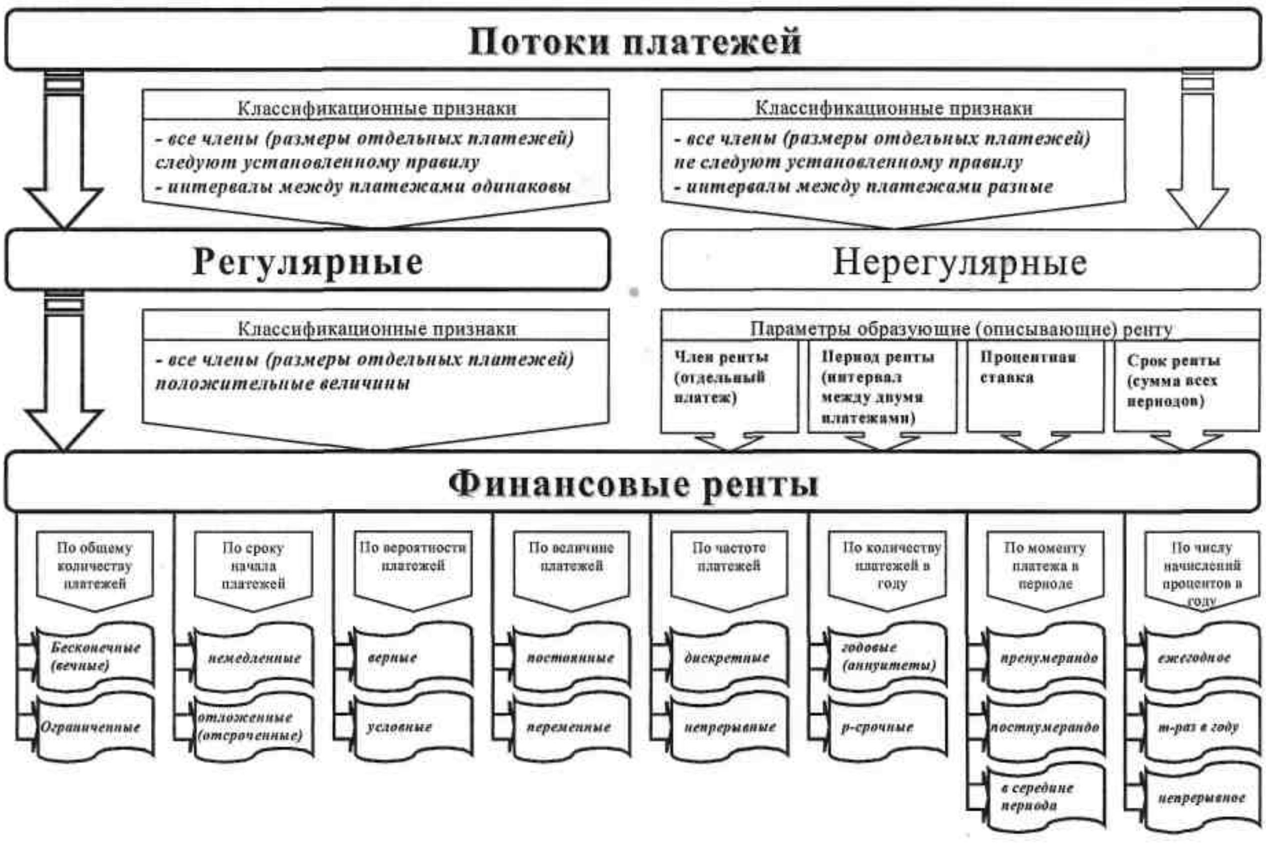

**Таблица 4: Основные зависимости для постоянных дискретных финансовых рент постнумерандо**

| Количество платежей и начислений в году | Стоимостные и временные параметры (характеристики) ренты | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Наращенная сумма и срок ренты | | Современная стоимость и срок ренты | |
| $p=1; m=1$ | $S=R\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ | $n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$ | $A=R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ | $n=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ |
| $p=1; m>1$ | $S=R\dfrac{\left(1+j/m\right)^{mn}-1}{\left(1+j/m\right)^{m}-1}$ | $n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}\left[\left(1+j/m\right)^{m}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+j/m\right)}$ | $A=R\dfrac{1-\left(1+j/m\right)^{-mn}}{\left(1+j/m\right)^{m}-1}$ | $n=\dfrac{\ln\left\{1-\dfrac{A}{R}\left[\left(1+j/m\right)^{m}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+j/m\right)}$ |
| $p=1; m\to\infty$ | $S=R\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$ | $n=\dfrac{\ln\left[\dfrac{S}{R}\left(e^{\delta}-1\right)+1\right]}{\delta}$ | $A=R\dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$ | $n=\dfrac{-\ln\left[1-\dfrac{A}{R}\left(e^{\delta}-1\right)\right]}{\delta}$ |
| $p>1; m=1$ | $S=R\dfrac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$ | $n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]+1\right\}}{\ln(1+i)}$ | $A=R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$ | $n=\dfrac{\ln\left\{1-\dfrac{A}{R}p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]\right\}^{-1}}{\ln(1+i)}$ |
| $p>1; m=p$ | $S=R\dfrac{\left(1+j/m\right)^{mn}-1}{j}$ | $n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}j+1\right)}{m\ln\left(1+j/m\right)}$ | $A=R\dfrac{1-\left(1+j/m\right)^{-mn}}{j}$ | $n=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+j/m\right)}$ |
| $p>1; m>1; m\neq p$ | $S=R\dfrac{\left(1+j/m\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right]}$ | $n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}p\left[\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+j/m\right)}$ | $A=R\dfrac{1-\left(1+j/m\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right]}$ | $n=\dfrac{\ln\left\{1-\dfrac{A}{R}p\left[\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+j/m\right)}$ |
| $p>1; m\to\infty$ | $S=R\dfrac{e^{\delta n}-1}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)}$ | $n=\dfrac{\ln\left[\dfrac{S}{R}p\left(e^{\delta/p}-1\right)+1\right]}{\delta}$ | $A=R\dfrac{1-e^{-\delta n}}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)}$ | $n=\dfrac{-\ln\left[1-\dfrac{A}{R}p\left(e^{\delta/p}-1\right)\right]}{\delta}$ |

*Таблица 1*

**Порядковые номера дней в году**

| День месяца | я<br>1 | ф<br>2 | м<br>3 | а<br>4 | м<br>5 | и<br>6 | и<br>7 | а<br>8 | с<br>9 | о<br>10 | н<br>11 | д<br>12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 32 | 60 | 91 | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 |
| 2 | 2 | 33 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 |
| 3 | 3 | 34 | 62 | 93 | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 |
| 4 | 4 | 35 | 63 | 94 | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 |
| 5 | 5 | 36 | 64 | 95 | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 |
| 6 | 6 | 37 | 65 | 96 | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 |
| 7 | 7 | 38 | 66 | 97 | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 |
| 8 | 8 | 39 | 67 | 98 | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 |
| 9 | 9 | 40 | 68 | 99 | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 |
| 10 | 10 | 41 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 |
| 11 | 11 | 42 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 |
| 12 | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| 13 | 13 | 44 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 |
| 14 | 14 | 45 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 |
| 15 | 15 | 46 | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 |
| 16 | 16 | 47 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 |
| 17 | 17 | 48 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 |
| 18 | 18 | 49 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 |
| 19 | 19 | 50 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 |
| 20 | 20 | 51 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 |
| 21 | 21 | 52 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 |
| 22 | 22 | 53 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 |
| 23 | 23 | 54 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 |
| 24 | 24 | 55 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 |
| 25 | 25 | 56 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 |
| 26 | 26 | 57 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 |
| 27 | 27 | 58 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 |
| 28 | 28 | 59 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 |
| 29 | 29 | | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 |
| 30 | 30 | | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 |
| 31 | 31 | | 90 | | 151 | | 212 | 243 | | 304 | | 365 |