Пример выполнения задания на самостоятельную работу

Этап 1. Необходимо по результатам наблюдений за показателями x и y экономического объекта (см. табл.1) построить линейную модель парной регрессии вида ***y=a+bx+ε*** и оценить её точность.

Таблица 1. Результаты наблюдений x и y.

Наблюдения		y·x	x^2	$\tilde{y}_x$ (по расчетам)
x	y			
1	3	3	1	5,91
2	12	24	4	10,22
3	16	48	9	14,53
4	18	72	16	18,84
5	24	120	25	23,15
6	28	168	36	27,46
7	32	224	49	31,77
8	36	288	64	36,03
9	40	360	81	40,39
10	44	440	100	44,7
∑55	253	1747	385	253,05

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ (этап 1):

1. Согласно исходным данным (табл.1) по формулам математической статистики определяем:

$$\overline{y \cdot x}=174{,}7; \qquad (\bar{x})^2 = 30{,}25; \quad \overline{x^2} = 38{,}5; \quad \bar{x} = 5{,}5; \quad \bar{y} = 25{,}3.$$

2. Расчёт коэффициентов *a* и *b* регрессионной модели *y=a+bx+ε* осуществляют в соответствии с МНК по формулам:

$$\begin{cases} b = \dfrac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \\ a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}\ . \end{cases}$$

Подставим данные промежуточных расчётов в приведённые формулы:

$$\begin{cases} b = \dfrac{174{,}7 - 5{,}5 \cdot 25{,}3}{38{,}5 - 30{,}25} \\ a = 25{,}3 - b \cdot 5{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \dfrac{174{,}7 - 139{,}15}{8{,}25} \\ a = 25{,}3 - b \cdot 5{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \dfrac{35{,}55}{8{,}25} \\ a = 25{,}3 - \dfrac{35{,}55}{1{,}5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4{,}31 \\ a = 25{,}3 - 23{,}7 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4{,}31 \\ a = 1{,}6 \end{cases}$$

3. Определяем значение аппроксимирующей функции $\tilde{y}_x$ в каждом узле x_i табл.1:

1) 1,6+4,31·1=5,91; 6) 1,6+4,31·6=27,46;
2) 1,6+4,31·2=10,22; 7) 1,6+4,31·7=31,77;
3) 1,6+4,31·3=14,53; 8) 1,6+4,31·8=36,08;
4) 1,6+4,31·4=18,84; 9) 1,6+4,31·9=40,39;
5) 1,6+4,31·5=23,15; 10) 1,6+4,31·10=44,7.

4. Согласно полученным данным $\tilde{y}_x$ получим график функции (рис.1)

$$\tilde{y}_x = a + bx + \varepsilon$$

5. Найдем среднюю ошибку аппроксимации по формуле:

$$S = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{y_i - \tilde{y}_x}{y_i} \right| \cdot 100\,\%. \quad S = \frac{1}{10} 1{,}346 \cdot 100\% = 13{,}46\%.$$

6. Найдем эластичность:

$$Э = \frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}; \qquad a + b\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow Э = \frac{b \cdot \bar{x}}{\bar{y}}; \quad Э = \frac{4{,}31 \cdot 5{,}5}{25{,}3} = 0{,}937.$$

Вывод: по данным табл.1 были найдены значения $\tilde{y}_x$ и построена линейная регрессионная модель, которая аппроксимирует результаты наблюдений. Ошибка аппроксимации составила 13,46 %, а эластичность - 0,937. В интересах повышения точности аппроксимации результатов наблюдений следует применить регрессионную модель второго порядка.

Этап 2. Необходимо по результатам наблюдений за показателями x и y экономического объекта (см. табл.2) построить модель парной регрессии вида ***y=a+bx+ cx²*** $+\varepsilon$ и оценить её точность.

Таблица 2. Результаты наблюдений x и y.

Наблюдения		x^2	x^3	x^4	$y \cdot x$	$y \cdot x^2$	$\tilde{y}_x$ (по расчетам)
x	y						
1	3	1	1	1	3	3	4,813
2	12	4	8	16	24	48	9,844
3	16	9	27	81	48	144	14,693
4	18	16	64	256	72	288	19,36
5	24	25	125	625	120	600	23,845
6	28	36	216	1296	168	1008	28,148
7	32	49	343	2401	224	1568	32,269
8	36	64	512	4096	288	2304	36,208
9	40	81	729	6561	360	3240	39,965
10	44	100	1000	10000	440	4400	43,54
∑55	253	385	3025	253	1747	13603	252,685

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ (этап 2):

1. Задана параболическая функция $y=a+bx+cx^2+\varepsilon$ с неизвестными коэффициентами a, b и c. В соответствии с рекомендациями МНК составляется система алгебраических уравнений 3-го порядка, в которой в качестве неизвестных рассматриваются оценки коэффициентов регрессии:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} y = N \cdot a + b\sum_{i=1}^{N} x + c\sum_{i=1}^{N} x^2 \\ \sum_{i=1}^{N} yx = a\sum_{i=1}^{N} x + b\sum_{i=1}^{N} x^2 + c\sum_{i=1}^{N} x^3 \\ \sum_{i=1}^{N} yx^2 = a\sum_{i=1}^{N} x^2 + b\sum_{i=1}^{N} x^3 + c\sum_{i=1}^{N} x^4 \end{cases}$$

2. Решим систему уравнений методом определителей. Найдем главный определитель Δ для системы уравнений:

$$\begin{cases} 10 \cdot a + 55 \cdot b + 385 \cdot c = 253; \\ 55 \cdot a + 385 \cdot b + 3025 \cdot c = 1747; \\ 385 \cdot a + 3025 \cdot b + 25333 \cdot c = 13603. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{Vmatrix} 10 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{Vmatrix} = 435600 \ .$$

3. Найдем частный определитель Δa:

$$\Delta a = \begin{Vmatrix} 253 & 55 & 385 \\ 1747 & 385 & 3025 \\ 13603 & 3025 & 25333 \end{Vmatrix} = -174240 \, .$$

4. Найдем частный определитель Δb:

$$\Delta b = \begin{Vmatrix} 10 & 253 & 385 \\ 55 & 1747 & 3025 \\ 385 & 13603 & 25333 \end{Vmatrix} = -174240 \, .$$

5. Найдем частный определитель Δc:

$$\Delta c = \begin{Vmatrix} 10 & 55 & 253 \\ 55 & 385 & 1747 \\ 385 & 3025 & 13603 \end{Vmatrix} \text{=-39600.}$$

6. Найдем значения коэффициентов *a, b, c*:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} \Rightarrow a = \frac{-174240}{435600} = -0{,}4;$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} \Rightarrow b = \frac{2312640}{435600} = 5{,}309;$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} \Rightarrow c = \frac{-39600}{435600} = -0{,}091.$$

7. Найдем значения аппроксимирующей функции $\widetilde{y}_x$ в каждом узле x_i табл.2:

-0,4+5,304·1-0,091·1=4,813; -0,4+5,304·2-0,091·4=9,844;
-0,4+5,304·3-0,091·9=14,693; -0,4+5,304·4-0,091·16=19,36;
-0,4+5,304·5-0,091·25=23,845; -0,4+5,304·6-0,091·36=28,148;
-0,4+5,304·7-0,091·49=32,269; -0,4+5,304·8-0,091·64=36,208;
-0,4+5,304·9-0,091·81=39,965; -0,4+5,304·10-0,091·100=43,54.

8. Согласно полученным данным $\widetilde{y}_x$ построим график функции

$$\widetilde{y}_x = a + bx + cx^2 + \varepsilon \, .$$

9. Найдем среднюю ошибку аппроксимации результатов наблюдений нелинейной моделью по формуле:

$$S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_i - \widetilde{y}_x}{y_i}\right| \cdot 100\,\% . \quad S = \frac{1}{10} \cdot 0{,}978 \cdot 100\% = 9{,}78\,\% .$$

9) Вычислим эластичность:

$$Э = \frac{b + 2 \cdot c \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x} + c(\bar{x})^2}; \qquad a + b\bar{x} + c(\bar{x})^2 = \bar{y} \Rightarrow Э = \frac{b \cdot \bar{x} + 2c(\bar{x})^2}{\bar{y}}.$$

$$Э = \frac{5{,}309 \cdot 5{,}5 + 2(-0{,}091) \cdot 30{,}25}{25{,}3} = \frac{23{,}694}{25{,}3} = 0{,}937\,.$$

Вывод: по данным табл.2 построена нелинейная модель парной регрессии. В ходе работы вычислена ошибка аппроксимации, которая составила 9,78 %. Эластичность - 0,937. Полученная точность аппроксимации соответствует принятым требованиям (<10%). Задача р е ш е н а.