Автономная некоммерческая организация высшего образования
«ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ»
(АНО ВО «ИЭУ»)

Кафедра «Экономика»

Фонд оценочных средств по дисциплине

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки - 38.03.02 Менеджмент

Направленность (профиль) –Производственный менеджмент

Квалификация (степень) выпускника – бакалавр

АНО ВО "ИЭУ"

Подписан цифровой подписью: АНО ВО "ИЭУ"
DN: ИНН ЮЛ=7103021213, СНИЛС=06855265296, ОГРН=1027100522734, ИНН=710601322488, E=oelis@yandex.ru, C=RU, S=Тульская область, L=Г. ТУЛА, STREET="УЛ. ВЕРЕСАЕВА, Д. 10", O="АНО ВО ""ИЭУ""", CN="АНО ВО ""ИЭУ""", T=Ректор, G=Владимир Дмитриевич, SN=Бушуев

Фонд оценочных средств рассмотрен на заседании кафедры «Экономика»
«17» января 2025 г., протокол № 17/01

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

В соответствии с требованиями основной образовательной программы подготовки бакалавра по направлению 38.03.01 «Экономика» в результате изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» у студентов должны сформироваться следующие **универсальные компетенции**

Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1)

общепрофессиональные компетенции:

Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем (ОПК-2)

.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Видами учебной деятельности, в рамках которых приобретаются знания, умения, навыки, являются лекции, практические занятия, самостоятельная работа обучающихся.

Соотнесение планируемых результатов обучения с видами учебной деятельности и оценочными средствами при формировании компетенции

Критерии сформированности компетенции	**Описание**	**Формы, методы, технологии**
Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1)		
знать	основные понятия критического анализа и синтеза информации, используемые в экономических исследованиях;	тестирование; ответ на экзамене;
уметь	применять системный подход решения задач, предусмотренных программой	тестирование; выполнение контрольной работы;
владение навыками	применения совокупности методов, позволяющих придать конкретное количественное выражение общим экономическим закономерностям	выполнение контрольной работы; ответ на экзамене
Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем (ОПК-2)		
знать	основные понятия анализа данных, , необходимых для решения поставленных экономических задач, Приемы сбора, обработки и анализа данных	тестирование; ответ на экзамене;
уметь	применять основные вероятностные и математико-статистические методы	тестирование; выполнение контрольной

	решения поставленных экономических задач, предусмотренные программой	работы;
владение навыками	применения совокупности методов, позволяющих придать конкретное количественное выражение общим экономическим закономерностям	выполнение контрольной работы; ответ на экзамене

Критерии и показатели оценивания тестовых заданий:

Вид тестового задания	Критерий	Показатель
тестовые задания с выбором одного (нескольких) ответа (-ов) в закрытой форме	выбор одного (нескольких) правильного (-ых) ответа (-ов) из предложенных вариантов	количество правильных выборов
тестовые задания на установление соответствия в закрытой форме	установление соответствия для всех предложенных признаков	количество правильно установленных соответствий
тестовые задания на установление правильной последовательности в закрытой форме	установление правильной последовательности в полном объеме предложенных вариантов	количество правильно установленных последовательностей

Критерии и показатели оценивания контрольной работы:

- объем выполненных заданий контрольной работы;
- глубина (соответствие изученным теоретическим обобщениям);
- осознанность (соответствие требуемым в программе умениям применять полученную информацию).

Критерии и показатели оценивания доклада с презентацией:

1. Новизна текста: а) актуальность темы исследования; б) новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы в установлении новых связей (межпредметных, внутрипредметных, интеграционных); в) умение работать с исследованиями, критической литературой, систематизировать и структурировать материал; г) явленность авторской позиции, самостоятельность оценок и суждений; д) стилевое единство текста, единство жанровых черт.
2. Степень раскрытия сущности вопроса: а) соответствие плана теме доклада; б) соответствие содержания теме и плану; в) полнота и глубина знаний по теме; г) обоснованность способов и методов работы с материалом; е) умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по одному вопросу (проблеме).
3. Обоснованность выбора источников: а) оценка использованной литературы: привлечены ли наиболее известные работы по теме исследования (в т.ч. журнальные публикации последних лет, последние статистические данные, сводки, справки и т.д.).
4. Умение выступать перед аудиторией: а) структура доклада, последовательность и логика изложения; б) скорость, громкость и четкость речи; в) использование невербальных средств концентрации внимания аудитории.
5. Соблюдение требований к оформлению презентации в Power Point: а) шрифт; б) цветовое оформление; в) содержание и оформление табличного и графического материала.

Критерии и показатели оценивания работы на практическом занятии:

- наличие полного и развернутого ответа на вопрос темы;
- демонстрация знаний ключевых понятий рассматриваемой проблемы;
- применение научной терминологии;
- грамотное оперирование полученными знаниями и навыками.

Критерии и показатели оценивания на экзамене

- содержательность и четкость ответа;
- владение материалом различной степени сложности;
- ориентирование в основных закономерностях функционирования объектов профессиональной деятельности.

3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Тестовые задания

Тема 1: Определения вероятностей

1. В партии из 12 деталей имеется 5 бракованных. Наудачу отобраны три детали. Тогда вероятность того, что среди отобранных деталей нет бракованных, равна …

$\frac{7}{44}$ - правильно

$\frac{1}{22}$

$\frac{7}{12}$

$\frac{1}{4}$

2. Игральная кость бросается два раза. Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков – семь, а разность – три, равна …

$\frac{1}{18}$ - правильно

$\frac{1}{9}$

$\frac{7}{36}$

0

3. В круг радиуса 8 помещен меньший круг радиуса 5. Тогда вероятность того, что точка, наудачу брошенная в больший круг, попадет также и в меньший круг, равна …

$\frac{25}{64}$ - правильно

$\frac{5}{8}$

$\frac{39}{64}$

$\frac{3}{8}$

4. В партии из 12 деталей имеется 5 бракованных. Наудачу отобраны три детали. Тогда вероятность того, что среди отобранных деталей нет годных, равна …

$\frac{1}{22}$ - правильно

$\frac{7}{44}$

$\frac{5}{12}$

$\frac{3}{5}$

Решение:

Для вычисления события A (среди отобранных деталей нет годных) воспользуемся формулой $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. В нашем случае общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из 12 имеющих, то есть C_{12}^{3}. А общее число благоприятствующих исходов равно числу способов, которыми можно извлечь три бракованные детали из пяти, то есть C_5^3. Следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}}{\frac{12!}{3!\cdot 9!}}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}.$$

Тема 2: Алгебра событий

1. Два студента сдают экзамен. Если ввести события A (экзамен успешно сдал первый студент) и B (экзамен успешно сдал второй студент), то событие, заключающееся в том, что экзамен сдадут успешно оба студента, будет представлять собой выражение …

$A\cdot B$ - правильно

$A\cdot\overline{B}$

$A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

$\overline{A}\cdot\overline{B}$

Решение:

То, что экзамен сдадут оба студента означает, что и первый, и второй студент сдадут экзамен, то есть речь идет о совместном наступлении этих событий. А событие, состоящее

в совместном наступлении нескольких событий, называется их произведением.
Правильным будет ответ: $A \cdot B.$

2. Операции сложения и умножения событий **не обладают** свойством …
$A - B = B - A$ - правильно
$A + B = B + A$
$AB = BA$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
Решение:
Операции сложения и умножения событий обладают свойствами:
а) коммутативности сложения $A + B = B + A;$
б) коммутативности умножения $AB = BA;$
в) ассоциативности сложения $A + (B + C) = (A + B) + C.$
Следовательно, операции сложения и умножения событий не обладают свойством $A - B = B - A.$

Тема 3: Теоремы сложения и умножения вероятностей
1. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров добавляют два черных шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Тогда вероятность того, что хотя бы один шар будет белым, равна …
$\frac{251}{286}$ - правильно
$\frac{35}{286}$
$\frac{6}{13}$
$\frac{138}{143}$
Решение:
Введем обозначения событий: A_k – k-ый вынутый шар будет белым, *А* – хотя бы один шар будет белым. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3})$, где $\overline{A_k}$ – k-ый вынутый шар не будет белым. Так как по условию задачи события A_1, A_2 и A_3 зависимы, то
$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdot P_{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{A_3}) = 1 - \frac{7}{13} \cdot \frac{7-1}{13-1} \cdot \frac{7-2}{13-2} = \frac{251}{286}.$$

2. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров добавляют два белых шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Тогда вероятность того, что все три шара будут белыми, равна …
$\frac{28}{143}$ - правильно
$\frac{3}{8}$

$\frac{115}{143}$

$\frac{4}{33}$

Решение:

Введем обозначения событий: A_k – k -ый вынутый шар будет белым, *A* – все три шара будут белыми. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, и так как по условию задачи события A_1, A_2 и A_3 зависимы, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{8}{13} \cdot \frac{8-1}{13-1} \cdot \frac{8-2}{13-2} = \frac{28}{143}.$$

3. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,95, а вторым – 0,80. Оба стрелка стреляют одновременно. Тогда вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком, равна …

0,23

0,95

0,875

0,17

Решение:

Введем обозначения событий: A (цель поражена первым стрелком), B (цель поражена вторым стрелком). Так как эти события независимы, то искомую вероятность C можно вычислить как:

$$P(C) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}23.$$

4. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,15; второй –0,05; третий –0,2. Тогда вероятность того, что в течение часа потребуют вмешательства наладчика все три станка, равна …

0,0015

0,4

0,015

0,9985

Решение:

Введем обозначения событий: A_k (вмешательства наладчика потребует k -ый станок), A (вмешательства наладчика потребуют все три станка).

Тогда

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}15 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}0015.$$

Тема 4: Полная вероятность и формулы Байеса

1. В первой урне 3 черных шара и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых шара и 6 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался черным. Тогда вероятность того, что этот шар вынули из второй урны, равна …

$\frac{2}{3}$ - правильно

$\frac{1}{3}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{3}{10}$

Решение:

Предварительно вычислим вероятность события A (вынутый наудачу шар – черный) по формуле полной вероятности: $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)$. Здесь $P(B_1)$ – вероятность того, что шар извлечен из первой урны; $P(B_2)$ – вероятность того, что шар извлечен из второй урны; $P_{B_1}(A)$ – условная вероятность того, что вынутый шар черный, если он извлечен из первой урны; $P_{B_2}(A)$ – условная вероятность того, что вынутый шар черный, если он извлечен из второй урны.

Тогда $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{20}=0{,}45.$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот шар был извлечен из второй урны, по формуле Байеса:

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}6}{0{,}45}=\frac{2}{3}.$$

2. Банк выдает 40% всех кредитов юридическим лицам, а 60% – физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,1; а для физического лица эта вероятность составляет 0,05. Получено сообщение о невозврате кредита. Тогда вероятность того, что этот кредит не погасило физическое лицо, равна …

$\frac{3}{7}$ - правильно

$\frac{4}{7}$

0,07

0,05

Решение:

Предварительно вычислим вероятность события A (выданный кредит не будет погашен в срок) по формуле полной вероятности: $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)$. Здесь $P(B_1)$ – вероятность того, что кредит был выдан юридическому лицу; $P(B_2)$ – вероятность того, что кредит был выдан физическому лицу; $P_{B_1}(A)$ – условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан юридическому лицу; $P_{B_2}(A)$ – условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан физическому лицу. Тогда

$$P(A)=\frac{40}{100}\cdot 0{,}1+\frac{60}{100}\cdot 0{,}05=0{,}07.$$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот кредит не погасило физическое лицо, по формуле Байеса:

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}07}=\frac{3}{7}.$$

3. Банк выдает 35% всех кредитов юридическим лицам, а 65% – физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,15; а для физического лица эта вероятность составляет 0,1. Тогда вероятность непогашения в срок очередного кредита равна …

0,1175
0,125
0,8825
0,1275

Решение:

Для вычисления вероятности события A (выданный кредит не будет погашен в срок) применим формулу полной вероятности: $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)$. Здесь $P(B_1)$ – вероятность того, что кредит был выдан юридическому лицу; $P(B_2)$ – вероятность того, что кредит был выдан физическому лицу; $P_{B_1}(A)$ – условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан юридическому лицу; $P_{B_2}(A)$ – условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан физическому лицу. Тогда

$$P(A)=\frac{35}{100}\cdot 0{,}15+\frac{65}{100}\cdot 0{,}1=0{,}1175.$$

4. В первой урне 6 черных шаров и 4 белых шара. Во второй урне 2 белых и 8 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар вынули из первой урны, равна …

$\frac{2}{3}$ - правильно

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{2}{5}$

Тема 5: Законы распределения вероятностей одномерных дискретных случайных величин

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	5
p	0,45	0,30	0,15	0,10

Тогда вероятность $P(2<X\le 5)$ равна …

$0{,}25$ - правильно

$0{,}55$

$0{,}15$

$0{,}45$

Решение:

$P(2 < X \le 5) = P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}25.$

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	a	b	0,1	0,2

Тогда значения *a* и *b* могут быть равны …

$a = 0{,}35,\ b = 0{,}2$ - правильно

$a = 0{,}25,\ b = 0{,}2$

$a = 0{,}35,\ b = 0{,}15$

$a = 0{,}35,\ b = 0{,}3$

Решение:

Так как сумма вероятностей возможных значений X равна 1, то
$a + b = 1 - 0{,}15 - 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}55.$ Этому условию удовлетворяет ответ:
$a = 0{,}35,\ b = 0{,}2.$

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3	5	7
p	0,35	0,25	0,10	0,30

Тогда вероятность $P(1 \le X \le 5)$ равна …

$0{,}7$ - правильно

$0{,}35$

$0{,}6$

$0{,}25$

Решение:

$P(1 \le X \le 5) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}10 = 0{,}7.$

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	4
p	0,1	0,25	a	0,3

Тогда значение *a* равно …

$a = 0{,}35$ - правильно

$a = 0{,}65$

$a = 0{,}45$

$a = 1{,}0$

Тема 6: Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	4	6
p	0,25	0,20	0,55

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид …

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}45 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$$ - правильно

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}45 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 0 \text{ при } x>6.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}20 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0{,}25 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}45 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 0 \text{ при } x>6.\end{cases}$$

Решение:

По определению $F(x)=P(X<x)=\sum\limits_{x_k<x} p_k.$

Тогда

а) при $x\le 1$, $F(x)=P(X<1)=0$,

б) при $1<x\le 4$, $F(x)=P(X=1)=0{,}25$,

в) при $4<x\le 6$, $F(x)=P(X=1)+P(X=4)=0{,}25+0{,}20=0{,}45$,

г) при $x>6$, $F(x)=P(X=1)+P(X=4)+P(X=6)=0{,}25+0{,}20+0{,}55=1$.

Следовательно,
$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}45 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$$

2. Для дискретной случайной величины X:

X	1	4	8	9
p	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}65 \text{ при } 1<x\le 4,\\ p \text{ при } 4<x\le 8,\\ 0{,}85 \text{ при } 8<x\le 9,\\ 1 \text{ при } x>9.\end{cases}$$

Тогда значение параметра p может быть равно …

0,7

1

0,85

0,6

Решение:

По определению $F(x)=P(X<x)=\sum\limits_{x_k<x} p_k.$ Следовательно, $p\ge 0{,}65$ и $p\le 0{,}85$.

Этим условиям удовлетворяет, например, значение $p=0{,}7$.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид …

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}4 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}7 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}8 \text{ при } 3<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

- правильно

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}4 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}7 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}8 \text{ при } 3<x\le 4,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}4 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}3 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}1 \text{ при } 3<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0{,}4 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}7 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}8 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 1 \text{ при } 3<x\le 4,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Решение:

По определению $F(x)=P(X<x)=\sum\limits_{x_k<x} p_k$. Тогда

а) при $x\le 1$, $F(x)=P(X<1)=0$,

б) при $1<x\le 2$, $F(x)=P(X=1)=0{,}4$,

в) при $2<x\le 3$, $F(x)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}4+0{,}3=0{,}7$,

г) при $3<x\le 4$, $F(x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}4+0{,}3+0{,}1=0{,}8$,

д) при $x>4$, $F(x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$.

Следовательно, $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}4 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}7 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}8 \text{ при } 3<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$

4. Для дискретной случайной величины X:

X	2	3	4	5
p	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}2 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}55 \text{ при } 3<x\le 4,\\ p \text{ при } 4<x\le 5,\\ 1 \text{ при } x>5.\end{cases}$$

Тогда значение параметра p может быть равно …

0,655

1

0,25

0,45

Решение:

По определению $F(x)=P(X<x)=\sum\limits_{x_k<x} p_k$. Следовательно, $p\ge 0{,}55$ и $p\le 1$. Этим условиям удовлетворяет, например, значение $p=0{,}655$.

Тема 7: Числовые характеристики дискретных случайных величин

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3
p	0,2	0,8

Тогда ее среднее квадратическое отклонение равно …

0,80

0,64

2,60

14,16

Решение:

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X определяется как $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, где дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Тогда

$D(X) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}8 - (1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}8)^2 = 0{,}64$, а $\sigma(X) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-2	4	7
p	0,1	0,5	0,4

Тогда ее математическое ожидание равно …

4,6

5,0

3,0

4,9

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3	6
p	0,6	0,3	0,1

Тогда ее математическое ожидание равно …

2,1 - правильно

0,9

3,3

2,2

Решение:

Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Тогда $M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3
p	0,4	0,6

Тогда ее дисперсия равна …

0,96 - правильно

$2{,}2$
$5{,}8$
$1{,}06$

Тема 8: Биномиальный закон распределения вероятностей

1. Проводится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна 0,6. Тогда математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ дискретной случайной величины *X* – числа появлений события *A* в $n = 100$ проведенных испытаниях – равны … $M(X) = 60$ $D(X) = 24$ - правильно
$M(X) = 24$ $D(X) = 60$
$M(X) = 6$ $D(X) = 24$
$M(X) = 24$ $D(X) = 6$

Решение:
Случайная величина *X* подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей, поэтому $M(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}6 = 60,$ а $D(X) = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24.$

2. Банк выдал пять кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Тогда вероятность того, что в срок не будут погашены три кредита, равна …
0,0081
0,081
0,06
0,0729

3. Проводится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна $0{,}8$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ дискретной случайной величины *X* – числа появлений события *A* в $n = 200$ проведенных испытаниях – равны …
$M(X) = 160$ $D(X) = 32$ - правильно
$M(X) = 32$ $D(X) = 160$
$M(X) = 16$ $D(X) = 24$
$M(X) = 24$ $D(X) = 16$

Решение:
Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей, поэтому $M(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}8 = 160,$ а $D(X) = n \cdot p \cdot q = 200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 32.$

4. В среднем 80% студентов группы сдают зачет с первого раза. Тогда вероятность того, что из 6 человек, сдававших зачет, с первого раза сдадут ровно 4 студента, равна …
$0{,}24576$ - правильно
$0{,}12288$
$0{,}4096$
$0{,}5333$

Решение:
Воспользуемся формулой Бернулли:

$P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n=6,\ k=4,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2.$

Тогда $P_6(X=4)=C_6^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^{6-4}=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^2=0{,}24576.$

Тема 9: Простейший поток событий. Распределение Пуассона

1. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно двум. Тогда вероятность того, что за шесть минут прибудут ровно девять самолетов, можно вычислить как …

$\dfrac{12^9}{9!}e^{-12}$ - правильно

$\dfrac{9^{12}}{12!}e^{-9}$

$\dfrac{9^{12}}{9!}e^{-9}$

$\dfrac{e^{-12}}{9!}$

2. Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 час равно пяти. Тогда вероятность того, что за два часа поступит восемь заявок, можно вычислить как …

$\dfrac{10^8}{8!}e^{-10}$ - правильно

$\dfrac{5^8}{8!}e^{-5}$

$\dfrac{8^{10}}{10!}e^{-8}$

$\dfrac{e^{-10}}{8!}$

Решение:

Вероятность наступления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона:

$P_t(X=k)=\dfrac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}e^{-\lambda\cdot t}$, где λ – интенсивность потока.

Так как $t=2$, $k=8$, $\lambda=5$, то $P_2(X=8)=\dfrac{(5\cdot 2)^8}{8!}e^{-5\cdot 2}=\dfrac{10^8}{8!}e^{-10}.$

3. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно двум. Тогда вероятность того, что за четыре минуты прибудут ровно шесть самолетов, можно вычислить как …

$\frac{8^6}{6!}e^{-8}$ - правильно

$\frac{4^6}{6!}e^{-4}$

$\frac{6^8}{6!}e^{-6}$

$\frac{e^{-8}}{6!}$

4. Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 час, равно трем. Тогда вероятность того, что за два часа поступит пять заявок, можно вычислить как …

$\frac{6^5}{5!}e^{-6}$ - правильно

$\frac{3^5}{5!}e^{-3}$

$\frac{5^6}{6!}e^{-5}$

$\frac{e^{-6}}{5!}$

Решение:

Вероятность наступления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона:

$P_t(X = k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}e^{-\lambda \cdot t}$, где λ – интенсивность потока.

Так как $t = 2$, $k = 5$, $\lambda = 3$, то $P_2(X = 5) = \frac{(3 \cdot 2)^5}{5!}e^{-3 \cdot 2} = \frac{6^5}{5!}e^{-6}$.

Тема 10: Вероятности состояний цепи Маркова

1. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, а вектор начального распределения вероятностей – $\overline{p}(0) = (0; 1)$. Тогда вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен …

$\overline{p}(2) = (0{,}32; 0{,}68)$ - правильно

$\overline{p}(2) = (0{,}68; 0{,}32)$

$\overline{p}(2) = (0{,}40; 0{,}60)$

$\overline{p}(2) = (0{,}64; 0{,}68)$

Решение:

Вектор вероятностей $\overline{p}(2)$ состояний цепи Маркова на втором шаге можно вычислить последовательно как

$$\overline{p}(1) = \overline{p}(0) \cdot P = (0; 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,4; 0,6),$$

$$\overline{p}(2) = \overline{p}(1) \cdot P = (0,4; 0,6) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,32; 0,68).$$

2. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$, а вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен $\overline{p}(2) = (0,7; 0,3)$. Тогда вектор вероятностей состояний цепи Маркова на третьем шаге равен …

$\overline{p}(3) = (0,55; 0,45)$ - правильно

$\overline{p}(3) = (0,45; 0,55)$

$\overline{p}(3) = (0,45; 0,45)$

$\overline{p}(3) = (0,46; 0,66)$

Решение:

Вектор вероятностей $\overline{p}(3)$ состояний цепи Маркова на третьем шаге можно вычислить как

$$\overline{p}(3) = \overline{p}(2) \cdot P = (0,7; 0,3) \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,55; 0,45).$$

3. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, а вектор начального распределения вероятностей – $\overline{p}(0) = (1; 0)$. Тогда вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен …

$\overline{p}(2) = (0,36; 0,64)$ - правильно

$\overline{p}(2) = (0,64; 0,36)$

$\overline{p}(2) = (0,20; 0,80)$

$\overline{p}(2) = (0,36; 0,32)$

Решение:

Вектор вероятностей $\overline{p}(2)$ состояний цепи Маркова на втором шаге можно вычислить последовательно как

$$\overline{p}(1) = \overline{p}(0) \cdot P = (1; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,2; 0,8),$$

$$\overline{p}(2) = \overline{p}(1) \cdot P = (0,2; 0,8) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,36; 0,64).$$

4. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix}$, а вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен $\overline{p}(2)=(0{,}3;0{,}7)$. Тогда вектор вероятностей состояний цепи Маркова на третьем шаге равен …

$\overline{p}(3)=(0{,}75;0{,}25)$ - правильно

$\overline{p}(3)=(0{,}25;0{,}75)$

$\overline{p}(3)=(0{,}85;0{,}25)$

$\overline{p}(3)=(0{,}54;0{,}34)$

Тема 11: Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ Cx^3 & \text{при } 0<x\le 6,\\ 0 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Тогда значение параметра C равно …

$\frac{1}{324}$ - правильно

$\frac{1}{72}$

$\frac{1}{1024}$

$\frac{1}{1296}$

Решение:

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,$ то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Cx^3dx=1,$ или $\int\limits_{0}^{6} Cx^3dx=1.$ Тогда

$\left.\frac{Cx^4}{4}\right|_0^6=1$ и $C=\frac{1}{324}.$

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x}{8} & \text{при } 0<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(1<X<3)$ равна …

$\frac{1}{2}$ - правильно

$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}$

Решение:

Воспользуемся формулой $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$ Тогда

$$P(1 < X < 3) = \int\limits_1^3 \frac{x}{8}dx = \frac{x^2}{16}\Big|_1^3 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ Cx^2 & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тогда значение параметра C равно …

$\frac{3}{64}$ - правильно

$\frac{1}{64}$

$\frac{1}{16}$

$\frac{1}{192}$

Решение:

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$ то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Cx^2 dx = 1,$ или $\int\limits_0^4 Cx^2 dx = 1.$ Тогда

$\frac{Cx^3}{3}\Big|_0^4 = 1$ и $C = \frac{3}{64}.$

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x}{18} & \text{при } 0<x\le 6,\\ 0 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(-1<X<5)$ равна …

$\frac{25}{36}$ - правильно

$\frac{13}{18}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{18}$

Решение:

Воспользуемся формулой $P(x_1<X<x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$ Тогда

$$P(-1<X<5)=\int\limits_{-1}^{5} f(x)dx=\int\limits_{0}^{5} f(x)dx=\int\limits_{0}^{5}\frac{x}{18}dx=\left.\frac{x^2}{36}\right|_0^5=\frac{25}{36}.$$

Тема 12: Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины

1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(-1<X<4)$ равна …

$\frac{16}{25}$ - правильно

$\frac{17}{25}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{9}{25}$

Решение:

Воспользуемся формулой $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$. Тогда

$$P(-1 < X < 4) = F(4) - F(-1) = \frac{16}{25} - 0 = \frac{16}{25}.$$

2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0 < x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид …

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$ - правильно

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0 < x < 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{75} & \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Решение:

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: $f(x) = F'(x)$. Тогда $\left(\dfrac{x^2}{25}\right)' = \dfrac{2x}{25}$ и

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le 0,\\ \dfrac{x}{5} & \text{при}\ 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$

Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид …

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\ x<0,\\ \dfrac{1}{5} & \text{при}\ 0<x<5,\\ 0 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$ - правильно

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\ x<0,\\ \dfrac{1}{5} & \text{при}\ 0<x<5,\\ 1 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\ x<0,\\ \dfrac{1}{5} & \text{при}\ 0<x<5,\\ 0 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\ x<0,\\ \dfrac{x^2}{10} & \text{при}\ 0<x<5,\\ 0 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$

Решение:

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: $f(x)=F'(x)$. Тогда $\left(\dfrac{x}{5}\right)'=\dfrac{1}{5}$ и

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\ x<0,\\ \dfrac{1}{5} & \text{при}\ 0<x<5,\\ 0 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при}\ 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при}\ x>5.\end{cases}$$

Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид …

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0<x<5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$ - правильно

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0<x<5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0<x<5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{75} & \text{при } 0<x<5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Решение:

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: $f(x)=F'(x)$. Тогда $\left(\dfrac{x^2}{25}\right)'=\dfrac{2x}{25}$ и

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0<x<5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(4<X<6)$ равна …

$\dfrac{9}{25}$ - правильно

$\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{16}{25}$

$\frac{4}{25}$

Решение:

Воспользуемся формулой $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$. Тогда

$P(4 < X < 6) = F(6) - F(4) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Тема 13: Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{3x^2}{64} & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание равно …

3

2

1

0

Решение:

Воспользуемся формулой $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$ Тогда

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{4} x\frac{3x^2}{64}dx = \frac{3}{64}\frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = 3.$

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{2x}{25} & \text{при } 0 < x \le 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Тогда ее дисперсия равна …

$\frac{25}{18}$ - правильно

$\frac{55}{6}$

$\frac{25}{2}$

$\frac{445}{18}$

Решение:

Дисперсию непрерывной случайной величины X можно вычислить по формуле

$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$. Тогда

$$D(X)=\int_0^5 x^2\frac{2x}{25}dx-\left(\int_0^5 x\frac{2x}{25}dx\right)^2=\frac{25}{2}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{25}{18}.$$

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x}{2} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Тогда ее дисперсия равна …

$\frac{2}{9}$ - правильно

$\frac{4}{3}$

2

$\frac{34}{9}$

Решение:

Дисперсию непрерывной случайной величины X можно вычислить по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$. Тогда

$$D(X)=\int_0^2 x^2\frac{x}{2}dx-\left(\int_0^2 x\frac{x}{2}dx\right)^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x}{8} & \text{при } 0<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание равно …

$\frac{8}{3}$ - правильно

2

8

$\frac{9}{8}$

Решение:

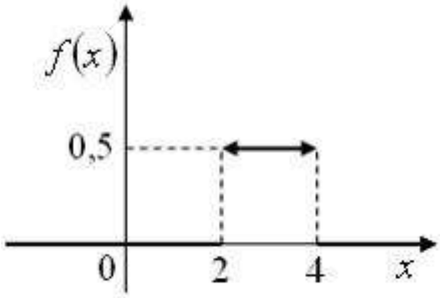
Воспользуемся формулой $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$ Тогда

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{4} x\frac{x}{8}dx=\frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4=\frac{8}{3}.$$

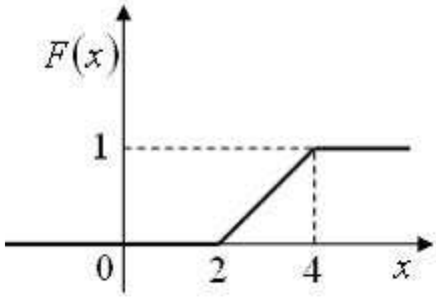
Тема 14: Равномерное распределение

1.

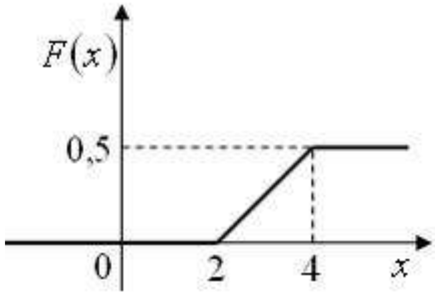
Дан график плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X :

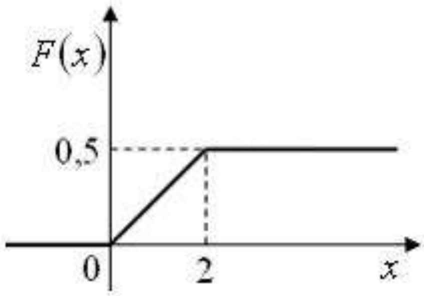


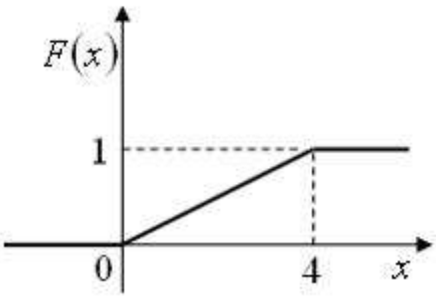
Тогда график ее функции распределения вероятностей имеет вид …



- правильно







Решение:

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

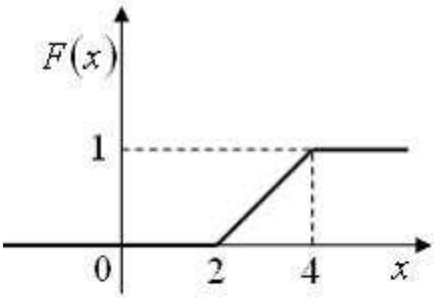
Тогда:

если $x \le 2$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2} 0dx = 0;$

если $2 < x < 4$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2} 0dx + \int\limits_{2}^{x} 0{,}5dx = 0{,}5x - 1;$

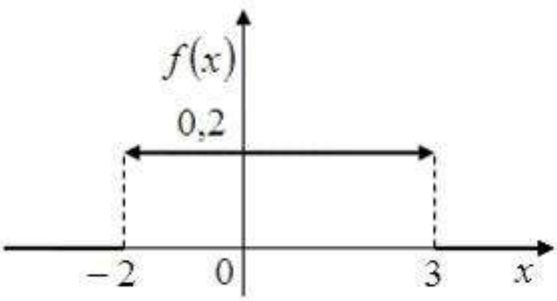
если $x \ge 4$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2} 0dx + \int\limits_{2}^{4} 0{,}5dx + \int\limits_{4}^{x} 0dx = 0{,}5x\Big|_{2}^{4} = 1.$

Тогда график $F(x)$ будет иметь вид:

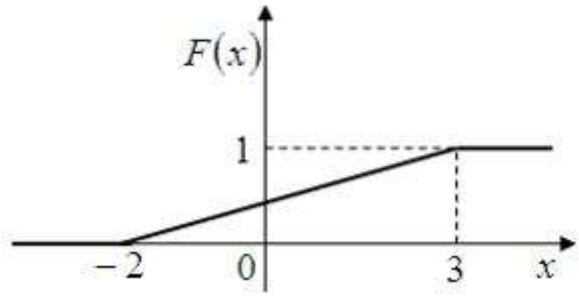


.

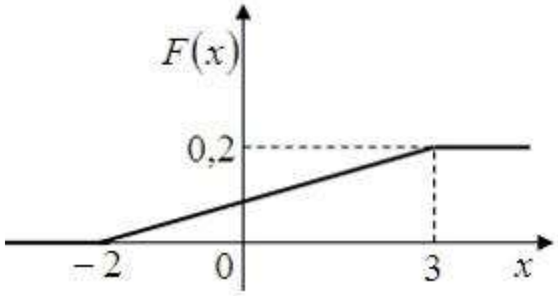
2. Дан график плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X:

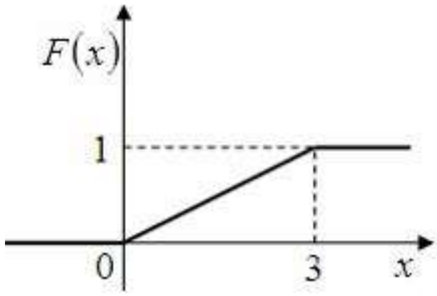


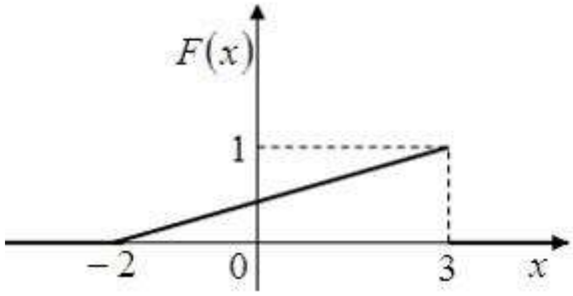
Тогда график ее функции распределения вероятностей имеет вид …



- правильно







Решение:

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

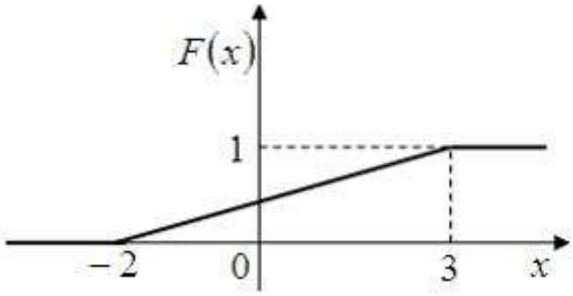
Тогда:

если $x \le -2$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2} 0dx = 0;$

если $-2 < x < 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2} 0dx + \int\limits_{-2}^{x} 0{,}2dx = 0{,}2x + 0{,}4;$

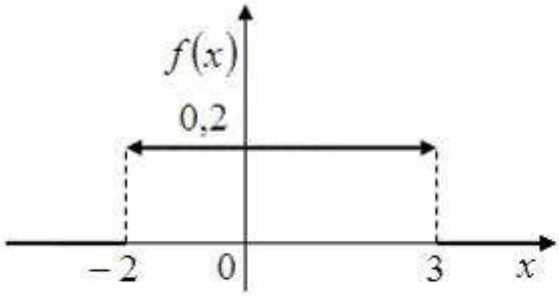
если $x \ge 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2} 0dx + \int\limits_{-2}^{3} 0{,}2dx + \int\limits_{3}^{x} 0dx = 0{,}2x\Big|_{-2}^{3} = 1.$

Тогда график $F(x)$ будет иметь вид:



.

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:



Тогда ее математическое ожидание равно …

$0{,}5$ - правильно

$\frac{25}{12}$

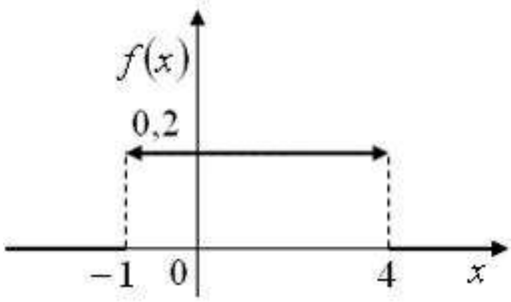
$1{,}0$

$1{,}5$

Решение:

Эта случайная величина распределена равномерно в интервале $(-2;\,3)$. Тогда ее математическое ожидание можно вычислить по формуле $M(X)=\frac{a+b}{2}$, то есть $M(X)=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$.

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:



Тогда ее математическое ожидание равно …

$1{,}5$ - правильно

$\frac{25}{12}$
2,0
2,5
Решение:
Эта случайная величина распределена равномерно в интервале $(-1; 4)$. Тогда ее математическое ожидание можно вычислить по формуле $M(X) = \frac{a+b}{2}$, то есть $M(X) = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$.

Тема 15: Показательное распределение
1. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 4e^{-4x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$ Тогда вероятность $P(0{,}2 < X < 1)$ определяется как …
$e^{-0{,}8} - e^{-4}$ - правильно
$e^{-4} - e^{-0{,}8}$
$4\left(e^{-0{,}8} - e^{-4}\right)$
$e^{-0{,}8} + e^{-4}$
Решение:
Плотность распределения вероятностей случайной величины X, распределенной по показательному закону, имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$, и вероятность попадания в интервал $(a; b)$ равна $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
Тогда $P(0{,}2 < X < 1) = e^{-0{,}8} - e^{-4}$.

2. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 4e^{-4x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$ Тогда ее математическое ожидание и дисперсия равны …
$M(X) = \frac{1}{4}$ $D(X) = \frac{1}{16}$ - правильно
$M(X) = \frac{1}{16}$ $D(X) = \frac{1}{4}$
$M(X) = \frac{1}{4}$ $D(X) = \frac{1}{4}$

$M(X) = \frac{1}{16}$ $D(X) = \frac{1}{16}$

3. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 3e^{-3x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$ Тогда вероятность $P(0,4 < X < 1,1)$ определяется как …

$e^{-1,2} - e^{-3,3}$ - правильно

$e^{-3,3} - e^{-1,2}$

$3\left(e^{-1,2} - e^{-3,3}\right)$

$e^{-3,3} + e^{-1,2}$

Решение:

Плотность распределения вероятностей случайной величины X, распределенной по показательному закону, имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0, \end{cases}$ и вероятность попадания в интервал $(a; b)$ равна $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Тогда $P(0,4 < X < 1,1) = e^{-1,2} - e^{-3,3}$.

4. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 6e^{-6x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$ Тогда ее математическое ожидание и дисперсия равны …

$M(X) = \frac{1}{6}$; $D(X) = \frac{1}{36}$ - правильно

$M(X) = \frac{1}{36}$; $D(X) = \frac{1}{6}$

$M(X) = \frac{1}{6}$; $D(X) = \frac{1}{6}$

$M(X) = \frac{1}{36}$; $D(X) = \frac{1}{36}$

Решение:

Плотность распределения вероятностей случайной величины X, распределенной по показательному закону, имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0, \end{cases}$ и математическое ожидание и дисперсия равны соответственно: $M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$

Тогда $M(X)=\frac{1}{6}$ и $D(X)=\frac{1}{36}.$

Тема 16: Нормальное распределение

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}.$ Тогда математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины равны …

$a=4,\ \sigma=2$ - правильно

$a=-4,\ \sigma=2$

$a=4,\ \sigma=4$

$a=2,\ \sigma=4$

Решение:

Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X),\ \sigma=\sigma(X)$, поэтому $a=4,\ \sigma=2.$

2. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X)=-12$ и дисперсией $D(X)=4.$ Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид …

$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+12)^2}{8}}$ - правильно

$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-12)^2}{8}}$

$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+12)^2}{4}}$

$f(x)=\frac{1}{12\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$

Решение:

Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины

X имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X)$, $\sigma=\sigma(X)$, поэтому $a=-12$, $\sigma=\sqrt{4}=2$. Тогда $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+12)^2}{8}}$.

3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X)=5$ и дисперсией $D(X)=9$. Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид …

$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$ - правильно

$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+5)^2}{18}}$

$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{50}}$

$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{6}}$

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{32}}$. Тогда математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины равны …

$a=-3,\ \sigma=4$ - правильно

$a=3,\ \sigma=4$

$a=-3,\ \sigma=16$

$a=3,\ \sigma=16$

Тема 17: Законы распределения вероятностей двумерных дискретных случайных величин

1. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=5$
$y_1=1$	0,15	0,10	a	0,20
$y_2=2$	b	0,05	0,10	0,15

Тогда значения a и b могут быть равны …

$a=0{,}10,\ b=0{,}15$ - правильно

$a = 0{,}45,\ b = 0{,}30$
$a = 0{,}30,\ b = 0{,}45$
$a = 0{,}15,\ b = 0{,}20$

Решение:

Так как сумма вероятностей равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_k) = 1,$ то $a + b = 1 - 0{,}15 - 0{,}10 - 0{,}20 - 0{,}05 - 0{,}10 - 0{,}15 = 0{,}25.$ Этому условию удовлетворяет ответ: $a = 0{,}10,\ b = 0{,}15.$

2. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$y_1 = -1$	0,05	0,25	0,10	0,05
$y_2 = 1$	0,15	0,05	0,05	0,30

Тогда вероятность $P(2 \le X \le 4)$ равна …

0,80 - правильно
0,45
0,50
0,70

Решение:

$P(2 \le X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$
$= (0{,}25 + 0{,}05) + (0{,}10 + 0{,}05) + (0{,}05 + 0{,}30) = 0{,}80.$

3. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$y_1 = -1$	0,05	0,25	0,10	0,05
$y_2 = 1$	0,15	0,05	0,05	0,30

Тогда вероятность $P(1 < X \le 3)$ равна …

0,45 - правильно
0,60
0,30
0,55

Решение:

$P(1 < X \le 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = (0{,}25 + 0{,}05) + (0{,}10 + 0{,}05) = 0{,}45.$

4. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 5$	$x_4 = 7$
$y_1 = 0$	0,05	a	0,10	0,20
$y_2 = 1$	0,10	0,05	b	0,15

Тогда значения *a* и *b* могут быть равны …

$a = 0{,}15,\ b = 0{,}20$ - правильно

$a = 0{,}25,\ b = 0{,}40$

$a = 0{,}35,\ b = 0{,}30$

$a = 0{,}15,\ b = 0{,}30$

Тема 18: Условные законы распределения вероятностей двумерных дискретных случайных величин

1. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 2$
$y_1 = 3$	0,25	0,05	0,10
$y_2 = 6$	0,15	0,20	0,25

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_2 = 6$, имеет вид …

X	-1	0	2
p (X | y_2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

- правильно

X	-1	0	2
p (X | y_2)	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

X	-1	0	2
p (X | y_2)	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

X	-1	0	2
p (X | y_2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$

Решение:

Условным законом распределения составляющей X при $Y = y_k$ называют совокупность условных вероятностей вида: $p(x_1|y_k), p(x_2|y_k), \ldots, p(x_n|y_k)$, где $p(x_i|y_k) = P_{Y=y_k}(X = x_i)$. Эти вероятности вычисляются по формуле:

$$p(x_i|y_k) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(y_k)}.$$

Найдем вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_2 = 6$:

$$p(x_1|y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}25} = \frac{1}{4},$$

$$p(x_2|y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3},$$

$$p(x_3|y_2) = \frac{p(x_3, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}25}{0{,}60} = \frac{5}{12}.$$

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей X примет вид:

X	-1	0	2
p (X ǀ y_2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

2. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = -1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 3$
$y_1 = -1$	0,10	0,15	0,05
$y_2 = 5$	0,25	0,10	0,35

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_2 = 1$, имеет вид …

Y	-1	5
p (Y ǀ x_2)	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

- правильно

Y	-1	5
p (Y ǀ x_2)	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

Y	-1	5
p (Y ǀ x_2)	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$

Y	-1	5
p (Y ǀ x_2)	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Решение:

Условным законом распределения составляющей Y при $X = x_i$ называют совокупность условных вероятностей вида: $p(y_1|x_i), p(y_2|x_i), \ldots, p(y_n|x_i)$, вычисляемых как $p(y_k|x_i) = \dfrac{p(x_i, y_k)}{p(x_i)}$.

Найдем вероятности возможных значений Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_2 = 1$:

$$p(y_1|x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}10} = \frac{3}{5},$$

$$p(y_2|x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}.$$

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей Y примет вид:

Y	-1	5
p (Y ǀ x_2)	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

3. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = -1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 3$
$y_1 = -1$	0,10	0,15	0,05
$y_2 = 5$	0,25	0,10	0,35

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_1 = -1$, равно …

Y	-1	5
p (Y ǀ x_1)	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

- правильно

Y	-1	5
p (Y | x_1)	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	-1	5
p (Y | x_1)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

Y	-1	5
p (Y | x_1)	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

Решение:

Условным законом распределения составляющей Y при $X = x_i$ называют совокупность условных вероятностей вида: $p(y_1|x_i), p(y_2|x_i), \ldots, p(y_n|x_i)$, вычисляемых как:

$$p(y_k|x_i) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(x_i)}.$$

Найдем вероятности возможных значений Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_1 = -1$:

$$p(y_1|x_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}10 + 0{,}25} = \frac{2}{7},$$

$$p(y_2|x_1) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(x_1)} = \frac{0{,}25}{0{,}35} = \frac{5}{7}.$$

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей Y примет вид:

Y	-1	5
p (Y | x_1)	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

4. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y \ X	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 2$
$y_1 = 3$	0,25	0,05	0,10
$y_2 = 6$	0,15	0,20	0,25

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 3$, имеет вид …

X	-1	0	2
$p(X \mid y_1)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

- правильно

X	-1	0	2
$p(X \mid y_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

X	-1	0	2
$p(X \mid y_1)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

X	-1	0	2
$p(X \mid y_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$

Тема 19: Функция двух случайных аргументов

1. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	-1	2
p	0,3	0,7

Y	1	3
q	0,4	0,6

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ имеет вид …

Z	0	2	3	5
p	0,12	0,18	0,28	0,42

- правильно

Z	-3	-1	2	6
p	0,18	0,12	0,28	0,42

Z	0	2	3	5
p	0,7	0,9	1,1	1,3

Z	0	2	3	5
p	0,12	0,18	0,28	0,48

Решение:

Чтобы найти возможные значения случайной величины Z, сложим каждое возможное значение X со всеми возможными значениями случайной величины Y:

$z_1 = -1 + 1 = 0,\ z_2 = -1 + 3 = 2,\ z_3 = 2 + 1 = 3,\ z_4 = 2 + 3 = 5.$

Вероятности этих возможных значений равны произведениям вероятностей слагаемых: $p_1 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12,\ p_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18,\ p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28,$ $p_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42.$ Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ примет вид:

Z	0	2	3	5
p	0,12	0,18	0,28	0,42

2. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	-1	2
p	0,3	0,7

Y	1	3
q	0,4	0,6

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X \cdot Y$ имеет вид …

Z	-3	-1	2	6
p	0,18	0,12	0,28	0,42

- правильно

Z	0	2	3	5
p	0,12	0,18	0,28	0,42

Z	-3	-1	2	6
p	0,9	0,7	1,1	1,3

Z	-3	-1	2	6
p	0,18	0,12	0,28	0,48

3. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	-1	1
p	0,8	0,2

Y	2	3
q	0,7	0,3

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X \cdot Y$ имеет вид …

Z	-3	-2	2	3
p	0,24	0,56	0,14	0,06

- правильно

Z	1	2	3	4
p	0,56	0,24	0,14	0,06

Z	-3	-2	2	3
p	1,1	1,5	0,9	0,5

Z	-3	-2	2	3
p	0,24	0,56	0,14	0,09

Решение:

Чтобы найти возможные значения случайной величины Z, сложим каждое возможное значение X со всеми возможными значениями случайной величины Y:

$z_1 = -1 + 2 = 1,\ z_2 = -1 + 3 = 2,\ z_3 = 1 + 2 = 3,\ z_4 = 1 + 3 = 4$.

Вероятности этих возможных значений равны произведениям вероятностей слагаемых: $p_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$, $p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$, $p_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$, $p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$. Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ примет вид:

Z	1	2	3	4
p	0,56	0,24	0,14	0,06

4. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	-1	1
p	0,8	0,2

Y	2	3
q	0,7	0,3

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ имеет вид …

Z	1	2	3	4
p	0,56	0,24	0,14	0,06

- правильно

Z	-3	-2	2	3
p	0,24	0,56	0,14	0,06

Z	1	2	3	4
p	1,5	1,1	0,9	0,5

Z	1	2	3	4
p	0,56	0,24	0,14	0,6

Решение:

Чтобы найти возможные значения случайной величины Z, сложим каждое возможное значение X со всеми возможными значениями случайной величины Y:

$z_1 = -1 + 2 = 1,\ z_2 = -1 + 3 = 2,\ z_3 = 1 + 2 = 3,\ z_4 = 1 + 3 = 4$.

Вероятности этих возможных значений равны произведениям вероятностей слагаемых: $p_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$, $p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$, $p_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$, $p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$. Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ примет вид:

Z	1	2	3	4
p	0,56	0,24	0,14	0,06

Тема 20: Ковариация и корреляция

1. Ковариационная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид …

$\begin{pmatrix} 3{,}5 & -1{,}1 \\ -1{,}1 & 2{,}4 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 3{,}5 & 1{,}1 \\ -1{,}1 & 2{,}4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3{,}5 & -1{,}1 \\ -1{,}1 & 2{,}4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3{,}5 & 1{,}1 \\ -1{,}1 & -2{,}4 \end{pmatrix}$

2. Корреляционная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид …

$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

Решение:

Для системы, состоящей из n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ или случайного вектора $\overline{X} = X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, корреляционная матрица R размерности $n \times n$ состоит из элементов r_{ik}, удовлетворяющих условиям: $r_{ik} = r_{ki}$, $r_{ii} = 1$ и $|r_{ik}| \le 1$.

Этим условиями удовлетворяет, например, матрица $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Ковариационная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид …

$\begin{pmatrix} 4{,}5 & 2{,}3 \\ 2{,}3 & 3{,}1 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 4{,}5 & -2{,}3 \\ 2{,}3 & 3{,}1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4{,}5 & 2{,}3 \\ 2{,}3 & -3{,}1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4{,}5 & 2{,}3 \\ -2{,}3 & 3{,}1 \end{pmatrix}$

4. Корреляционная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид …

$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Решение:

Для системы, состоящей из n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ или случайного вектора $\overline{X} = X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, корреляционная матрица R размерности $n \times n$

состоит из элементов r_{ik}, удовлетворяющих условиям: $r_{ik} = r_{ki}$, $r_{ii} = 1$ и $|r_{ik}| \le 1$.

Этим условиями удовлетворяет, например, матрица $R = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 21: Неравенство Чебышева

1. Математическое ожидание случайной величины X равно $M(X) = 52$, а дисперсия – $D(X) = 24$. Тогда вероятность того, что $32 < X < 72$, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как …

$P \ge 0{,}94$ - правильно

$P < 0{,}06$

$P = 0{,}94$

$P = 0{,}06$

Решение:

Воспользуемся неравенством Чебышева вида: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Тогда $P(32 < X < 72) = P(|X - 52| < 20) \ge 1 - \dfrac{24}{20^2} = 0{,}94.$

2. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна $0{,}3$. Всего было куплено 200 билетов. Тогда вероятность того, что количество выигравших билетов будет заключено в пределах от 50 до 70, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как …

$P \ge 0{,}58$ - правильно

$P < 0{,}42$

$P = 0{,}58$

$P = 0{,}42$

Решение:

Воспользуемся неравенством Чебышева вида: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где случайная величина X – количество выигравших билетов. Тогда $M(X) = np = 200 \cdot 0{,}3 = 60$, $D(X) = npq = 200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 42$ и

$$P(50 < X < 70) = P(|X - 60| < 10) \ge 1 - \frac{42}{10^2} = 0{,}58.$$

3. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна $0{,}2$. Всего было куплено 100 билетов. Тогда вероятность того, что количество выигравших билетов будет заключено в пределах от 15 до 25, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как …

$P \ge 0{,}36$ - правильно

$P < 0{,}64$

$P = 0{,}36$
$P = 0{,}64$
Решение:

Воспользуемся неравенством Чебышева вида: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где случайная величина X – количество выигравших билетов. Тогда $M(X) = np = 100 \cdot 0{,}2 = 20$, $D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 16$ и

$$P(15 < X < 25) = P(|X - 20| < 5) \geq 1 - \frac{16}{5^2} = 0{,}36.$$

Тема 22: Неравенство Бернулли

1. Вероятность появления события A в каждом из 500 проведенных испытаний равна $0{,}4$. Тогда вероятность того, что относительная частота появлений события A будет заключена в пределах от $0{,}36$ до $0{,}44$, можно оценить с использованием неравенства Бернулли как …

$P \geq 0{,}70$ - правильно
$P < 0{,}30$
$P = 0{,}70$
$P = 0{,}30$

2. Вероятность изготовления бракованного изделия равна $0{,}1$. Всего было изготовлено 500 изделий. Тогда вероятность того, что бракованных изделий окажется от 8 до 12%, можно оценить с использованием неравенства Бернулли как …

$P \geq 0{,}55$ - правильно
$P < 0{,}45$
$P = 0{,}55$
$P = 0{,}45$

Решение:

Воспользуемся неравенством Бернулли вида: $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$, где $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 500$. Тогда

$$P\left(0{,}08 < \frac{m}{n} < 0{,}12\right) = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}02\right) \geq 1 - \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{500 \cdot 0{,}02^2} = 0{,}55.$$

3. Вероятность появления события A в каждом из 800 проведенных испытаний равна $0{,}4$. Тогда вероятность того, что относительная частота появлений события A будет заключена в пределах от $0{,}38$ до $0{,}42$, можно оценить с использованием неравенства Бернулли как …

$P \geq 0{,}25$ - правильно
$P < 0{,}75$

$P = 0{,}25$

$P = 0{,}75$

4. Вероятность изготовления бракованного изделия равна $0{,}1$. Всего было изготовлено 400 изделий. Тогда вероятность того, что бракованных изделий окажется от 7 до 13%, можно оценить с использованием неравенства Бернулли как …

$P \geq 0{,}75$ - правильно

$P < 0{,}25$

$P = 0{,}75$

$P = 0{,}25$

Решение:

Воспользуемся неравенством Бернулли вида: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, где $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 400$. Тогда

$$P\left(0{,}07 < \frac{m}{n} < 0{,}13\right) = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}03\right) \geq 1 - \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{400 \cdot 0{,}03^2} = 0{,}75.$$

Тема 23: Локальная формула Лапласа

1. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна $0{,}6$. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 250 раз, следует вычислить по …

локальной формуле Лапласа

формуле полной вероятности

формуле Пуассона

интегральной формуле Лапласа

Решение:

Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным. Поэтому для вычисления таких вероятностей на практике используется локальная формула Лапласа $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

2. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна $0{,}1$. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 52 раза, следует вычислять как …

$P \approx \frac{1}{6}\varphi(2)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - правильно

$P \approx \frac{1}{36}\varphi(2)$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$P \approx 0{,}5-\Phi(2)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа

$P \approx \Phi(2)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа

Решение:

Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k)=P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным. Поэтому для вычисления таких вероятностей на практике используется локальная формула Лапласа $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$ где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},$

$p=0{,}1$, $n=100$, $k=52$.

Следовательно, $P_{400}(52) \approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\varphi\left(\frac{52-400\cdot 0{,}1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=\frac{1}{6}\varphi(2).$

3. Вероятность появления некоторого события в каждом из 300 независимых испытаний постоянна и равна $0{,}8$. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 230 раз, следует вычислить по …

локальной формуле Лапласа

формуле полной вероятности

формуле Пуассона

интегральной формуле Лапласа

4. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна $0{,}2$. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 84 раза, следует вычислять как …

$P \approx \frac{1}{8}\varphi(0{,}5)$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ - правильно

$P \approx \frac{1}{64}\varphi(0{,}5)$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$P \approx 0{,}5-\Phi(0{,}5)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа

$P \approx \Phi(0{,}5)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа

Решение:

Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли

$P_n(k)=P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным.
Поэтому для вычисления таких вероятностей на практике используется локальная формула Лапласа $P_n(k)\approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$ где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},$
$p=0{,}2$, $n=400$, $k=84$.

Следовательно, $P_{400}(84)\approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{84-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=\frac{1}{8}\varphi(0{,}5).$

Тема 24: Интегральная формула Лапласа

1. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Тогда вероятность того, что событие появится не менее 300 и не более 328 раз, следует вычислять как …

$P(300\le X\le 328)\approx \Phi(1)+\Phi(2{,}5)$**, где** $\Phi(t)$ **– функция Лапласа**

$P(300\le X\le 328)\approx \Phi(1)-\Phi(2{,}5)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа

$P(300\le X\le 328)\approx \frac{1}{8}(\varphi(1)-\varphi(2{,}5))$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$P(300\le X\le 328)\approx \frac{1}{64}(\varphi(1)-\varphi(2{,}5))$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Решение:

Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n\to\infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k)=P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным, особенно когда надо вычислять вероятности не отдельного равенства (события) $X=k$, а неравенств вида $k_1\le X\le k_2$. Для вычисления таких вероятностей на практике используется интегральная формула Лапласа $P(k_1\le X\le k_2)\approx \Phi(t_2)-\Phi(t_1)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа, а $t_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},\ t_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ k_2=328,\ k_1=320,$ $n=400,\ p=0{,}8.$

Следовательно,

$$P(300\le X\le 328)\approx \varPhi\left(\frac{328-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\varPhi\left(\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$
$$=\varPhi(1)+\varPhi(2{,}5).$$

2. Вероятность появления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,2. Тогда вероятность того, что событие появится не менее 18 и не более 24 раз, следует вычислять как …

$P(18 \le X \le 24) \approx \Phi(1) + \Phi(0,5)$**, где** $\Phi(t)$ **– функция Лапласа**

$P(18 \le X \le 24) \approx \Phi(1) - \Phi(0,5)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа

$P(18 \le X \le 24) \approx \frac{1}{4}(\varphi(1) - \varphi(0,5))$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$P(18 \le X \le 24) \approx \frac{1}{16}(\varphi(1) - \varphi(0,5))$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Решение:

Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным, особенно когда надо вычислять вероятности не отдельного равенства (события) $X = k$, а неравенств вида $k_1 \le X \le k_2$. Для вычисления таких вероятностей на практике используется интегральная формула Лапласа $P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа, а $t_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $t_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $k_2 = 24$, $k_1 = 18$, $n = 100$, $p = 0,2$.

Следовательно,

$$P(18 \le X \le 24) \approx \Phi\left(\frac{24 - 100 \cdot 0,2}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{18 - 100 \cdot 0,2}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \Phi(1) + \Phi(0,5).$$

3. Вероятность того, что деталь не пройдет проверку ОТК, равна 0,05. Тогда вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется не менее 15 и не более 28 деталей, не прошедших проверку ОТК, следует вычислить по …

интегральной формуле Лапласа

формуле полной вероятности

формуле Пуассона

локальной формуле Лапласа

4. Вероятность того, что деталь не пройдет проверку ОТК, равна 0,15. Тогда вероятность того, что среди 300 случайно отобранных деталей окажется не менее 50 деталей, не прошедших проверку ОТК, следует вычислить по …

интегральной формуле Лапласа

формуле полной вероятности

формуле Пуассона

локальной формуле Лапласа

Решение:

Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным, особенно когда надо вычислять вероятности не отдельного равенства (события) $X = k$, а неравенств вида $k_1 \le X \le k_2$. Для вычисления таких вероятностей на практике используется интегральная формула Лапласа $P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа, а $t_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $t_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Тема 25: Вариационный ряд

1.

Статистическое распределение выборки имеет вид

x_i	3	5	6	9	10
w_i	0,05	0,25	0,33	w_4	0,12

Тогда значение относительной частоты w_4 равно …

0,25

0,05

0,26

0,75

Решение:

Сумма относительных частот равна единице. Поэтому

$w_4 = 1 - 0{,}05 - 0{,}25 - 0{,}33 - 0{,}12 = 0{,}25.$

2. Статистическое распределение выборки имеет вид

x_i	5	6	8	10	11
n_i	7	16	23	13	8

Тогда объем выборки равен …

67

40

5

107

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 81$:

x_i	1	2	4	5	6
n_i	5	14	n_3	22	6

Тогда значение n_3 равно …

34

81

47

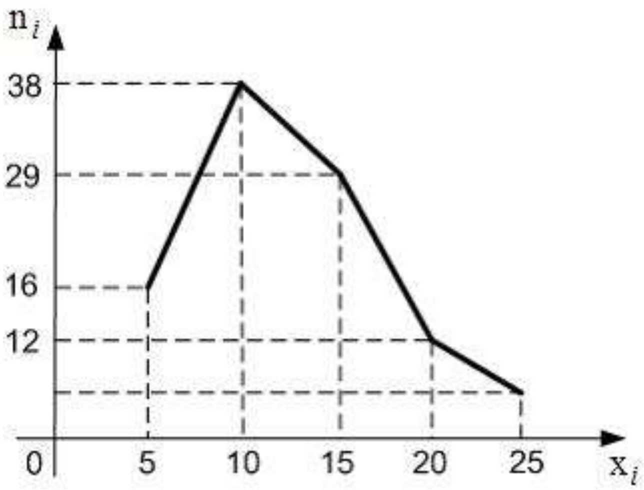
33

Решение:

Объем выборки вычисляется по формуле $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, где n_i – частота варианты x_i. Тогда $n_3 = 81 - 5 - 14 - 22 - 6 = 34.$

Тема 26: Полигон и гистограмма

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$, полигон частот которой имеет вид:



Тогда относительная частота варианты $x_i = 25$ в выборке равна …

0,05

0,06

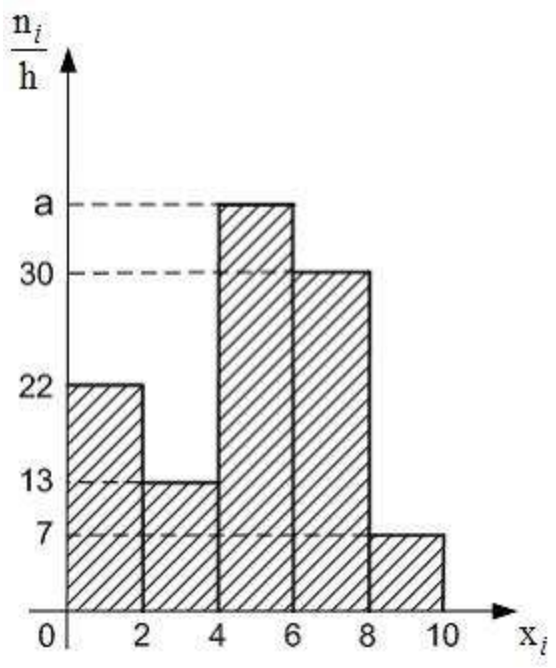
0,25

0,20

Решение:

Относительная частота w_i вычисляется по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$, где n_i – частота варианты x_i, а $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки. Вычислим предварительно частоту варианты $x_5 = 25$ как $n_5 = 100 - 16 - 38 - 29 - 12 = 5.$ Тогда $w_5 = \frac{5}{100} = 0{,}05.$

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 220$, гистограмма частот которой имеет вид:



Тогда значение *a* равно …

38

39

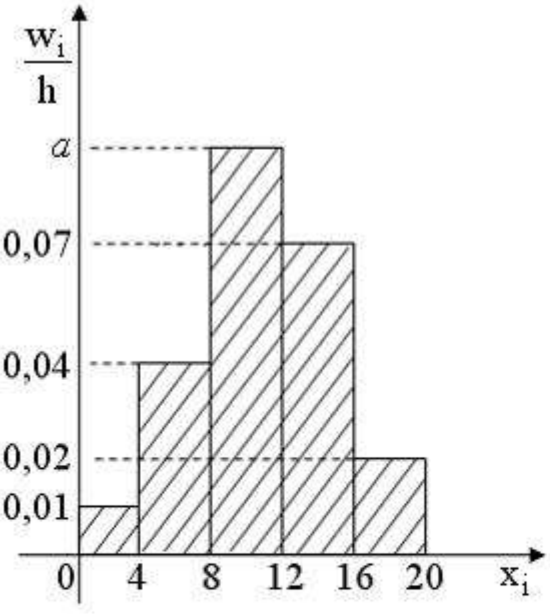
76

37

Решение:

Так как объем выборки вычисляется как $n=(7+13+22+30+a)\cdot h,$ где $h=2$, то $a=\frac{220}{2}-7-13-22-30=38.$

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=100$, гистограмма относительных частот которой имеет вид

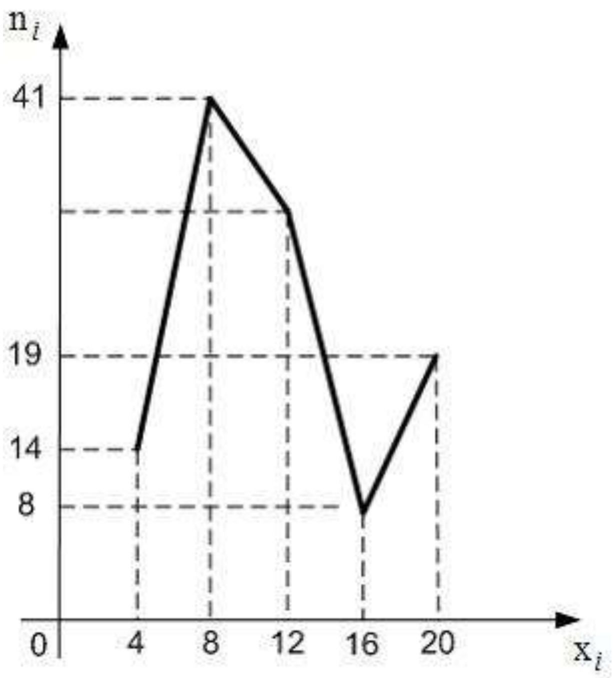


Тогда значение *a* равно …

0,11 - правильно

$0{,}12$
$0{,}09$
$0{,}14$
Решение:
Так как площадь гистограммы относительных частот равна 1, то
$4(0{,}01+0{,}02+0{,}04+0{,}07+a)=1$. Тогда $a=0{,}11$.

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=114$, полигон частот которой имеет вид:



Тогда число вариант $x_i=12$ в выборке равно …
32
82
8
31

Тема 27: Характеристики вариационного ряда
1.
Мода вариационного ряда 2, 4, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 11, 12 равна …
7
12
10
2
Решение:
Модой вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту. Такой вариантой является варианта 7, частота которой равна трем.

2. Медиана вариационного ряда 11, 14, 16, 17, 17, 17, 18, 19, 21, 22, 22, 23, 25, 25 равна …
18,5
17
14

18

Решение:

Медианой вариационного ряда называется значение признака генеральной совокупности, приходящееся на середину вариационного ряда. Так как в середине ряда располагаются две варианты: 18 и 19, то медиана равна их средней арифметической – 18,5.

3. Медиана вариационного ряда 5, 7, 9, 12, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 21 равна …

15

12

16

13

Тема 28: Эмпирическая функция распределения вероятностей

1. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	1	3	5
n_i	19	n_2	n_3

,

эмпирическая функция распределения вероятностей которой имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x \leq 1, \\ 0{,}19 \ \text{ при } \ 1 < x \leq 3, \\ 0{,}64 \ \text{ при } \ 3 < x \leq 5, \\ 1 \ \text{ при } \ x > 5. \end{cases}$$

Тогда …

$n_2 = 45 \ n_3 = 36$ - правильно

$n_2 = 36 \ n_3 = 45$

$n_2 = 55 \ n_3 = 26$

$n_2 = 64 \ n_3 = 17$

Решение:

По определению $F^*(x) = W(X < x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x. Тогда при $3 < x \leq 5$, $F^*(x) = \dfrac{19 + n_2}{100} = 0{,}64,$ то есть $n_2 = 45$, а $n_3 = 100 - 19 - 45 = 36.$

2. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	1	4	7	10
n_i	35	30	20	15

.

Тогда ее эмпирическая функция распределения вероятностей $F^*(x)$ имеет вид …

$$F^*(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}35 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}65 \text{ при } 4<x\le 7,\\ 0{,}85 \text{ при } 7<x\le 10,\\ 1 \text{ при } x>10\end{cases}$$ - правильно

$$F^*(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}35 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}65 \text{ при } 4<x\le 7,\\ 0{,}85 \text{ при } 7<x\le 10,\\ 0 \text{ при } x>10\end{cases}$$

$$F^*(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}85 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}65 \text{ при } 4<x\le 7,\\ 0{,}35 \text{ при } 7<x\le 10,\\ 0 \text{ при } x>10\end{cases}$$

$$F^*(x)=\begin{cases}0{,}35 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}30 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}20 \text{ при } 4<x\le 7,\\ 0{,}15 \text{ при } 7<x\le 10,\\ 1 \text{ при } x>10\end{cases}$$

Решение:

По определению $F^*(x)=W(X<x)=\dfrac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x. Тогда

а) при $x\le 1$ $F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}=\dfrac{0}{100}=0,$

б) при $1<x\le 4$ $F^*(x)=\dfrac{35}{100}=0{,}35,$

в) при $4<x\le 7$ $F^*(x)=\dfrac{35+30}{100}=0{,}65,$

г) при $7<x\le 10$ $F^*(x)=\dfrac{35+30+20}{100}=0{,}85,$

д) при $x > 10$ $F^*(x) = \dfrac{35+30+20+15}{100} = 1.$

Следовательно, $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}35 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}65 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}85 \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$

3. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	1	4	7	10
n_i	35	30	20	15

.

Тогда ее эмпирическая функция распределения вероятностей $F^*(x)$ имеет вид …

$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}35 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}65 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}85 \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 1 \text{ при } x > 10 \end{cases}$ - правильно

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}35 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}65 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}85 \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 0 \text{ при } x > 10 \end{cases}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}85 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}65 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}35 \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 0 \text{ при } x > 10 \end{cases}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0{,}35 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}30 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}20 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}15 \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 1 \text{ при } x > 10 \end{cases}$$

Решение:

По определению $F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x. Тогда

а) при $x \le 1$ $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{100} = 0,$

б) при $1 < x \le 4$ $F^*(x) = \frac{35}{100} = 0{,}35,$

в) при $4 < x \le 7$ $F^*(x) = \frac{35+30}{100} = 0{,}65,$

г) при $7 < x \le 10$ $F^*(x) = \frac{35+30+20}{100} = 0{,}85,$

д) при $x > 10$ $F^*(x) = \frac{35+30+20+15}{100} = 1.$

Следовательно, $$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}35 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}65 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}85 \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$$

4. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	2	4	6	8
n_i	20	34	15	31

.

Тогда ее эмпирическая функция распределения вероятностей $F^*(x)$ имеет вид …

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}20 \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}54 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}69 \text{ при } 6 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8 \end{cases}$$ - правильно

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}20 \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}54 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}69 \text{ при } 6 < x \le 8, \\ 0 \text{ при } x > 8 \end{cases}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}69 \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}54 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}20 \text{ при } 6 < x \le 8, \\ 0 \text{ при } x > 8 \end{cases}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0{,}20 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}34 \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}15 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}31 \text{ при } 6 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8 \end{cases}$$

5. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	2	5	8
n_i	27	n_2	n_3

,

эмпирическая функция распределения вероятностей которой имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}27 \text{ при } 2 < x \le 5, \\ 0{,}61 \text{ при } 5 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$$

Тогда …

$n_2 = 34$ $n_3 = 39$ - правильно

$n_2 = 39$ $n_3 = 34$

$n_2 = 44$ $n_3 = 29$

$n_2 = 61$ $n_3 = 12$

Решение:

По определению $F^*(x) = W(X < x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x. Тогда при $5 < x \le 8$, $F^*(x) = \dfrac{27 + n_2}{100} = 0{,}61$, то есть $n_2 = 34$, а $n_3 = 100 - 27 - 34 = 39$.

Тема 29: Основные понятия об оценках параметров распределения

1. Дан доверительный интервал $(20{,}145; 21{,}755)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна …

0,805

0,005

1,61

20,95

2. Дан доверительный интервал $(12{,}44;14{,}68)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна …

1,12

0,01

2,24

13,56

Решение:

Точность интервальной оценки $(a;b)$ определяется как $\delta = \dfrac{b-a}{2}$, то есть $\delta = \dfrac{14{,}68-12{,}44}{2} = 1{,}12.$

3. Дан доверительный интервал $(16{,}64;18{,}92)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда при увеличении объема выборки этот доверительный интервал может принять вид …

$(17{,}18;18{,}38)$ - правильно

$(16{,}15;19{,}41)$

$(17{,}18;18{,}92)$

$(16{,}15;18{,}38)$

Решение:

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака можно представить в виде симметричного интервала $(\overline{x_B} - \delta, \overline{x_B} + \delta)$, где точечная оценка математического ожидания $\overline{x_B} = 17{,}78$, а точность оценки $\delta = 1{,}14$. В случае увеличения объема выборки точность оценки улучшается, то есть значение δ будет меньше 1,14.

4. Дан доверительный интервал $(-0{,}28;\ 1{,}42)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда при уменьшении надежности (доверительной вероятности) оценки доверительный интервал может принять вид …

$(-0{,}14;\ 1{,}28)$ - правильно

$(-0{,}37;\ 1{,}51)$

$(-0{,}14;\ 1{,}42)$

$(0;\ 1{,}42)$

Решение:

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака можно представить в виде симметричного интервала $(\overline{x_B} - \delta, \overline{x_B} + \delta)$, где точечная оценка математического ожидания $\overline{x_B} = 0{,}57$, а точность оценки $\delta = 0{,}85$. В случае уменьшения надежности точность оценки улучшается, то есть значение δ будет меньше 0,85.

Тема 30: Точечная оценка математического ожидания

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	11	12	14	15
y_i	4	19	20	7

Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

13,14

13,0

13,34

13,2

Решение:

Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле $\bar{x}_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$.

То есть $\bar{x}_B = \dfrac{4 \cdot 11 + 19 \cdot 12 + 20 \cdot 14 + 7 \cdot 15}{50} = 13{,}14.$

2. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 4,5; 5,2; 6,1; 7,8, 8,3. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

6,38

6,42

6,1

6,4

Решение:

Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле $\bar{x}_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

То есть $\bar{x}_B = \dfrac{4{,}5 + 5{,}2 + 6{,}1 + 7{,}8 + 8{,}3}{5} = 6{,}38.$

3. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 2,1; 2,3; x_3; 2,7; 2,9. Если несмещенная оценка математического ожидания равна 2,48, то x_3 равно …

2,4

2,5

2,6

2,48

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 20$:

x_i	9	10	11
n_i	5	9	6

Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

10,05 - правильно

$10{,}0$

$10{,}55$

$10{,}5$

Решение:

Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле $\bar{x}_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$.

То есть $\bar{x}_B = \dfrac{5 \cdot 9 + 9 \cdot 10 + 6 \cdot 11}{20} = 10{,}05.$

Тема 31: Точечная оценка дисперсии

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	10,1	10,4	10,7
y_i	2	4	4

Тогда выборочное среднее квадратическое отклонение равно …

$\sqrt{0{,}0504}$ - правильно

$0{,}0504$

$10{,}46$

$\sqrt{10{,}46}$

Решение:

Выборочное среднее квадратическое отклонение вычисляется как $\sigma_B = \sqrt{D_B}$, где

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} \right)^2.$$

Тогда

$$D_B = \frac{2 \cdot 10{,}1^2 + 4 \cdot 10{,}4^2 + 4 \cdot 10{,}7^2}{10} - \left(\frac{2 \cdot 10{,}1 + 4 \cdot 10{,}4 + 4 \cdot 10{,}7}{10} \right)^2 = 0{,}0504,$$

и $\sigma_B = \sqrt{0{,}0504}$.

2. систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 3,6; 3,8; 4,3. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна …

0,13

0,065

3,9

0,7

Решение:

Несмещенная оценка дисперсии вычисляется по формуле:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_B)^2}{n-1},$$ где $$\bar{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$ Вычислив предварительно

$$\bar{x}_B=\frac{3,6+3,8+4,3}{3}=3,9,$$ получаем

$$S^2=\frac{(3,6-3,9)^2+(3,8-3,9)^2+(4,3-3,9)^2}{3-1}=0,13.$$

3. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 15; 18; 21; 24. Тогда выборочная дисперсия равна …

11,25
19,5
15
21,25

Решение:

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$D_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_B)^2}{n},$$ где $$\bar{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$ Вычислив предварительно

$$\bar{x}_B=\frac{15+18+21+24}{4}=19,5,$$ получаем

$$D_B=\frac{(15-19,5)^2+(18-19,5)^2+(21-19,5)^2+(24-19,5)^2}{4}=11,25.$$

Тема 32: Интервальные оценки параметров распределения

1. Точечная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака равна 0,4. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

$(-0,05;\,0,85)$ - правильно
$(0,4;\,0,85)$
$(0;\,0,85)$
$(-0,15;\,1,15)$

2. Дан доверительный интервал $(32,06;\,41,18)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точечная оценка математического ожидания равна …

36,62
36,52
9,12
73,24

3. Точечная оценка среднего квадратического отклонения нормально распределенного количественного признака равна 3,5. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

$(0;\,8,33)$ - правильно
$(3,5;\,8,33)$

$(0; 3,5)$
$(-1,33; 8,33)$

Решение:
Интервальной оценкой среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака служит доверительный интервал
$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ при $q < 1$
или $0 < \sigma < s(1+q)$ при $q > 1$, где q находят по соответствующей таблице приложений.
Этому определению удовлетворяет интервал $(0; 8,33)$.

4. Точечная оценка вероятности биномиально распределенного количественного признака равна 0,38. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …
$(0,25; 0,51)$ - правильно
$(-0,05; 0,81)$
$(0,38; 0,51)$
$(0,29; 0,49)$

Решение:
Интервальная оценка (p_1, p_2) вероятности p биномиально распределенного количественного признака симметрична относительно его точечной оценки, и $p_1 > 0$.
Таким свойствам удовлетворяет интервал $(0,25; 0,51)$.

Тема 33: Линейная корреляция
1.
При построении выборочного уравнения парной регрессии вычислены выборочный коэффициент корреляции $r_B = 0,54$ и выборочные средние квадратические отклонения $\sigma_X = 1,6,\ \sigma_Y = 3,2$. Тогда выборочный коэффициент регрессии *Y* на *X* равен …
$1,08$ - правильно
$-1,08$
$0,27$
$-0,27$

2. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y = 2,7 + 0,6x$, а выборочные средние квадратические отклонения равны: $\sigma_X = 0,7,\ \sigma_Y = 2,8$. Тогда выборочный коэффициент корреляции r_B равен …
$0,15$ - правильно
$-2,4$
$2,4$
$-0,15$

Решение:

Выборочный коэффициент корреляции r_B можно вычислить из соотношения

$\rho_{YX} = r_B \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$. Тогда $r_B = \rho_{YX} \cdot \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0{,}6 \cdot \dfrac{0{,}7}{2{,}8} = 0{,}15.$

3. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y = -4{,}8 + 1{,}2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен …

$0{,}82$ - правильно

$-0{,}82$

$1{,}2$

$-1{,}2$

Решение:

Значение выборочного коэффициента корреляции, во-первых, принадлежит промежутку $[-1, 1]$, а во-вторых, его знак совпадает со знаком выборочного коэффициента регрессии. Этим условиям удовлетворяет значение $0{,}82$.

4. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $\overline{y}_x - 2{,}5 = 1{,}34(x + 3{,}46)$. Тогда выборочное среднее признака X равно …

$-3{,}46$ - правильно

$3{,}46$

$2{,}5$

$-2{,}5$

Решение:

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x})$. Тогда выборочное среднее признака X равно $-3{,}46$.

Тема 34: Статистические гипотезы, статистический критерий

1. Правосторонняя критическая область может определяться из соотношения …

$P(K > 1{,}86) = 0{,}05$ - правильно

$P(K < -1{,}86) = 0{,}05$

$P(K < -1{,}86) + P(K > 1{,}86) = 0{,}05$

$P(-1{,}86 < K < 1{,}86) = 0{,}95$

2. Левосторонняя критическая область может определяться из соотношения …

$P(K < -1{,}72) = 0{,}05$ - правильно

$P(K > 1{,}72) = 0{,}05$

$P(K < -1{,}72) + P(K > 1{,}72) = 0{,}10$

$P(-1{,}72 < K < 1{,}72) = 0{,}90$

Решение:

Левосторонней называют критическую область, определяемую соотношением

$P(K < k_{kp}) = \alpha$, где k_{kp} – отрицательное число, а α – уровень значимости. Таким соотношением является $P(K < -1{,}72) = 0{,}05$.

3. Соотношением вида $P(K < -2{,}09) = 0{,}025$ можно определить …
левостороннюю критическую область
правостороннюю критическую область
двустороннюю критическую область
область принятия гипотезы
Решение:
Данное соотношение определяет левостороннюю критическую область, так как левосторонней называют критическую область, определяемую соотношением $P(K < -k_{kp}) = \alpha$, где k_{kp} – положительное число, а α – уровень значимости.

4. Соотношением вида $P(K < -2{,}78) + P(K > 2{,}78) = 0{,}01$ можно определить …
двустороннюю критическую область
правостороннюю критическую область
левостороннюю критическую область
область принятия гипотезы
Решение:
Данное соотношение определяет двустороннюю критическую область, так как двусторонней называют критическую область, определяемую, например, соотношением вида $P(K < -k_{kp}) + P(K > k_{kp}) = \alpha$, где k_{kp} – положительное число, а α – уровень значимости.

Тема 35: Проверка гипотез о дисперсиях

1. Наблюдаемое значение критерия проверки гипотезы $H_0 : D(X) = 4{,}0$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому (предполагаемому) значению $\sigma_0^2 = 4{,}0$ может иметь вид …

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n-1)S^2}{4}$ - правильно

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n-1)}{2} s$

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n+1)S^2}{4}$

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n+1)}{2} s$

2. Основная гипотеза имеет вид $H_0 : \sigma^2 = 3{,}4.$ Тогда конкурирующей может являться гипотеза …

$H_1 : \sigma^2 < 3{,}4$ - правильно

$H_1 : \sigma^2 \geq 3{,}4$

$H_1 : \sigma^2 \le 3{,}4$

$H_1 : \sigma^2 > 3$

Решение:

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит основной гипотезе. Условию $\sigma^2 = 3{,}4$ противоречит $H_1 : \sigma^2 < 3{,}4.$

3. Основная гипотеза имеет вид $H_0 : \sigma^2 = 4{,}2.$ Тогда конкурирующей может являться гипотеза …

$H_1 : \sigma^2 > 4{,}2$ - правильно

$H_1 : \sigma^2 \ge 4{,}2$

$H_1 : \sigma^2 \le 4{,}2$

$H_1 : \sigma^2 < 4{,}1$

Решение:

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит основной гипотезе. Условию $\sigma^2 = 3{,}4$ противоречит $H_1 : \sigma^2 > 4{,}2.$

4. Наблюдаемое значение критерия проверки гипотезы $H_0 : D(X) = 5{,}2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому (предполагаемому) значению $\sigma_0^2 = 5{,}2$ может иметь вид …

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n-1)S^2}{5{,}2}$ - правильно

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n-1)}{\sqrt{5{,}2}} s$

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n+1)S^2}{5{,}2}$

$\chi^2_{набл} = \dfrac{(n+1)}{\sqrt{5{,}2}} s$

Решение:

Для проверки гипотезы $H_0 : D(X) = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2 применяется статистический критерий

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

который имеет хи-квадрат распределение с $k = n - 1$ степенями свободы, где n – объем выборки, по которой вычисляется исправленная дисперсия S^2.

Тема 36: Проверка гипотез о математических ожиданиях

1. Основная гипотеза имеет вид $H_0: a = 24{,}5.$ Тогда конкурирующей может являться гипотеза …

$H_1: a > 24{,}5$ - правильно

$H_1: a \le 24{,}5$

$H_1: a \ge 24{,}5$

$H_1: a < 24{,}4$

Решение:

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит основной гипотезе. Условию $a = 24{,}5$ противоречит $H_1: a > 24{,}5.$

2. Наблюдаемое значение критерия проверки гипотезы $H_0: M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ может иметь вид …

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D(X)}{80} + \frac{D(Y)}{60}}}$$ - правильно

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D(X)}{50} - \frac{D(Y)}{70}}}$$

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{D(X) + D(Y)}}$$

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{D(X) - D(Y)}}$$

Решение:

Для проверки гипотезы $H_0: M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ применяется статистический критерий $Z = \frac{M(\overline{X} - \overline{Y})}{\sigma(\overline{X} - \overline{Y})},$ который имеет стандартное нормальное распределение. Тогда наблюдаемое значение критерия определяется как

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$$ где n и m – объемы независимых выборок, по которым

вычислены выборочные средние $\overline{x}_B$ и $\overline{y}_B$ соответственно. Следовательно, например,

при $n = 80$, $m = 60$ получаем $Z_{набл} = \dfrac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{80} + \dfrac{D(Y)}{60}}}$.

3. Наблюдаемое значение критерия проверки гипотезы $H_0 : M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ может иметь вид …

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D(X)}{50} + \frac{D(Y)}{70}}}$$ - правильно

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D(X)}{50} - \frac{D(Y)}{70}}}$$

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{D(X) + D(Y)}}$$

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{D(X) - D(Y)}}$$

Решение:

Для проверки гипотезы $H_0 : M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ применяется статистический критерий $Z = \dfrac{M(\overline{X} - \overline{Y})}{\sigma(\overline{X} - \overline{Y})}$, который имеет стандартное нормальное распределение. Тогда наблюдаемое значение критерия определяется как

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$$ где n и m – объемы независимых выборок, по которым вычислены выборочные средние $\overline{x}_B$ и $\overline{y}_B$ соответственно. Следовательно, например,

при $n = 50$, $m = 70$ получаем $Z_{набл} = \dfrac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{50} + \dfrac{D(Y)}{70}}}$.

4. Основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 18{,}5$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза …

$H_1 : a \neq 18{,}5$ - правильно

$H_1 : a \leq 18{,}5$

$H_1 : a \geq 18{,}5$

$H_1 : a > 18{,}6$

Кейс 1 подзадача 1

1. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 4 % с вероятностью 0,9 или подешеветь на 4 % с вероятностью 0,1. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Установите соответствие между случайными событиями и вероятностями этих событий.
1. Курс ценной бумаги упадет
2. Курс ценной бумаги вырастет
3. Курс ценной бумаги не изменится
1. 0,19
2. 0,81
3. 0
0,01
0,18

Решение:

Пусть событие A заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели вырастет на 4 % до $1000 \cdot 1{,}04 = 1040$ руб., а событие B заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели упадет на 4 % до $1000 \cdot 0{,}96 = 960$ руб. Следовательно,

1) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели упадет, определяется как вероятность события $B \cdot B + A \cdot B + B \cdot A,$ то есть равна $0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}19,$ так как $1000 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}96 = 998{,}4 < 1000.$

2) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели вырастет, определяется как вероятность события $A \cdot A,$ то есть равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

3) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели не изменится, равна нулю, так как соответствующее событие является невозможным.

2. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 6 % с вероятностью 0,75 или подешеветь на 6 % с вероятностью 0,25. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Установите соответствие между случайными событиями и вероятностями этих событий.
1. Курс ценной бумаги упадет
2. Курс ценной бумаги вырастет
3. Курс ценной бумаги не изменится
1 - 0,4375
2 - 0,5625
3 - 0
0,0625
0,375

Решение:
Пусть событие A заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели вырастет на 6 % до $1000 \cdot 1{,}06 = 1060$ руб., а событие B заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели упадет на 6 % до $1000 \cdot 0{,}94 = 940$ руб.
Следовательно,
1) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели упадет, определяется как вероятность события $B \cdot B + A \cdot B + B \cdot A,$ то есть равна
$0{,}25 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}4375,$ так как
$1000 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}94 = 996{,}4 < 1000.$
2) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели вырастет, определяется как вероятность события $A \cdot A,$ то есть равна $0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625.$
3) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели не изменится, равна нулю, так как соответствующее событие является невозможным.

3. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 5 % с вероятностью 0,8 или подешеветь на 5 % с вероятностью 0,2. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Установите соответствие между случайными событиями и вероятностями этих событий.
1. Курс ценной бумаги упадет
2. Курс ценной бумаги вырастет
3. Курс ценной бумаги не изменится
1 - 0,36
2 - 0,64
3 - 0
0,04
0,32
Решение:
Пусть событие A заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели вырастет на 5 % до $1000 \cdot 1{,}05 = 1050$ руб., а событие B заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели упадет на 5 % до $1000 \cdot 0{,}95 = 950$ руб.
Следовательно,
1) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели упадет, определяется как вероятность события $B \cdot B + A \cdot B + B \cdot A,$ то есть равна
$0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}36,$ так как $1000 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}95 = 997{,}5 < 1000.$
2) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели вырастет, определяется как вероятность события $A \cdot A,$ то есть равна $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64.$
3) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели не изменится, равна нулю, так как соответствующее событие является невозможным.

4. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 2 % с вероятностью 0,6 или подешеветь на 2 % с вероятностью 0,4. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Установите соответствие между случайными событиями и вероятностями этих событий.
1. Курс ценной бумаги упадет

2. Курс ценной бумаги вырастет
3. Курс ценной бумаги не изменится
1 - 0,64
2 - 0,36
3 - 0
0,16
0,24
Решение:
Пусть событие A заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели вырастет на 2 % до $1000 \cdot 1{,}02 = 1020$ руб., а событие B заключается в том, что стоимость ценной бумаги в течение недели упадет на 2 % до $1000 \cdot 0{,}98 = 980$ руб. Следовательно,
1) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели упадет, определяется как вероятность события $B \cdot B + A \cdot B + B \cdot A,$ то есть равна $0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}64,$ так как $1000 \cdot 1{,}02 \cdot 0{,}98 = 999{,}6 < 1000$.
2) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели вырастет, определяется как вероятность события $A \cdot A,$ то есть равна $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.
3) вероятность того, что курс ценной бумаги за две недели не изменится, равна нулю, так как соответствующее событие является невозможным.

Кейс 1 подзадача 2
1. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 4 % с вероятностью 0,9 или подешеветь на 4 % с вероятностью 0,1. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Максимально возможный курс ценной бумаги будет принадлежать интервалам (в руб.) …
(1081,5; 1082,5)
(1081,0; 1082,0)
(1080,5; 1081,5)
(1080,0; 1081,0)
Решение:
Определим максимально возможный курс ценной бумаги как $1000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 1081{,}6$ руб. Тогда из предложенных ответов правильными будут ответы: (1081,5; 1082,5) и (1081,0; 1082,0).

2. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 6 % с вероятностью 0,75 или подешеветь на 6 % с вероятностью 0,25. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Максимально возможный курс ценной бумаги будет принадлежать интервалам (в руб.) …
(1123,5; 1127,5)
(1121,5; 1125,0)
(1118,5; 1122,5)
(1115,5; 1121,0)
Решение:
Определим максимально возможный курс ценной бумаги как $1000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 1123{,}6$ руб. Тогда из предложенных ответов правильными будут ответы: (1123,5; 1127,5) и (1121,5; 1125,0).

3. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 5 % с вероятностью 0,8 или подешеветь на 5 % с вероятностью 0,2. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Максимально возможный курс ценной бумаги будет принадлежать интервалам (в руб.) …
(1101,0; 1103,4)
(1100,4; 1103,0)
(1099,9; 1102,4)
(1099,4; 1102,0)
Решение:
Определим максимально возможный курс ценной бумаги как $1000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 1102{,}5$ руб. Тогда из предложенных ответов правильными будут ответы: (1101,0; 1103,4) и (1100,4; 1103,0).

4. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 2 % с вероятностью 0,6 или подешеветь на 2 % с вероятностью 0,4. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Максимально возможный курс ценной бумаги будет принадлежать интервалам (в руб.) …
(1040,0; 1041,0)
(1039,5; 1040,5)
(1039,0; 1040,0)
(1038,5; 1039,5)
Решение:
Определим максимально возможный курс ценной бумаги как $1000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 1040{,}4$ руб. Тогда из предложенных ответов правильными будут ответы:
(1040,0; 1041,0) и (1039,5; 1040,5).

Кейс 1 подзадача 3
1. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 4 % с вероятностью 0,9 или подешеветь на 4 % с вероятностью 0,1. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Математическое ожидание курсовой стоимости ценой бумаги будет равно …
1065,024
1065,00
1064,976
1000,00
Решение:
Составим закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – курсовой стоимости ценной бумаги, как

X	921,6	998,4	1081,6
p	0,01	0,18	0,81

где $921{,}6 = 1000 \cdot 0{,}96^2$, а $0{,}01 = 0{,}1 \cdot 0{,}1$.
Тогда $M(X) = 921{,}6 \cdot 0{,}01 + 998{,}4 \cdot 0{,}18 + 1081{,}6 \cdot 0{,}81 = 1065{,}024$.

2. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 6 % с вероятностью 0,75 или подешеветь на 6 % с вероятностью 0,25.

Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Математическое ожидание курсовой стоимости ценой бумаги будет равно …

1060,90
1060,00
1059,10
1000,00

Решение:

Составим закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – курсовой стоимости ценной бумаги, как:

X	883,6	996,4	1123,6
p	0,0625	0,375	0,5625

где $883{,}6 = 1000 \cdot 0{,}94^2$, а $0{,}0625 = 0{,}25 \cdot 0{,}25$.

Тогда $M(X) = 883{,}6 \cdot 0{,}0625 + 996{,}4 \cdot 0{,}375 + 1123{,}6 \cdot 0{,}5625 = 1060{,}9$.

3. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 5 % с вероятностью 0,8 или подешеветь на 5 % с вероятностью 0,2. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Математическое ожидание курсовой стоимости ценой бумаги будет равно …

1060,90
1050,00
1059,10
1000,00

Решение:

Составим закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – курсовой стоимости ценной бумаги, как

X	902,5	997,5	1102,5
p	0,04	0,32	0,64

где $902{,}5 = 1000 \cdot 0{,}95^2$, а $0{,}04 = 0{,}2 \cdot 0{,}2$.

Тогда $M(X) = 902{,}5 \cdot 0{,}04 + 997{,}5 \cdot 0{,}32 + 1102{,}5 \cdot 0{,}64 = 1060{,}9$.

4. Курсовая стоимость ценной бумаги равна 1000 рублей. Она может в течение недели подорожать на 2 % с вероятностью 0,6 или подешеветь на 2 % с вероятностью 0,4. Предполагается, что еженедельные изменения цен независимы. Прошло две недели.

Математическое ожидание курсовой стоимости ценой бумаги будет равно …

1008,016
1008,00
1007,944
1000,00

Решение:

Составим закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – курсовой стоимости ценной бумаги, как

X	960,4	999,6	1040,4
p	0,16	0,48	0,36

где $960{,}4 = 1000 \cdot 0{,}98^2$, а $0{,}16 = 0{,}4 \cdot 0{,}4$.

Тогда $M(X) = 960{,}4 \cdot 0{,}16 + 999{,}6 \cdot 0{,}48 + 1040{,}4 \cdot 0{,}36 = 1008{,}016.$

Кейс 2 подзадача 1

1.

Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	5	30
«Средний»	20	15
«Крупный»	10	20

Вероятность того, что кредит краткосрочный, если он «средний», можно оценить как …

$\frac{4}{7}$ - правильно

$\frac{3}{7}$

$\frac{1}{7}$

$\frac{1}{3}$

Решение:

Вероятность того, что кредит краткосрочный, если он «средний», можно оценить как

$$\frac{20\%}{20\% + 15\%} = \frac{4}{7}.$$

2. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	10	30
«Средний»	15	15
«Крупный»	25	5

Вероятность того, что кредит краткосрочный, если он «крупный», можно оценить как …

$\frac{5}{6}$ - правильно

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

Решение:

Вероятность того, что кредит краткосрочный, если он «крупный», можно оценить как $\frac{25\%}{25\%+5\%}=\frac{5}{6}$.

3. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	5	35
«Средний»	15	15
«Крупный»	20	10

Вероятность того, что кредит долгосрочный, если он «мелкий», можно оценить как …

$\frac{7}{8}$ - правильно

$\frac{1}{8}$

$\frac{7}{20}$

$\frac{7}{12}$

Решение:

Вероятность того, что кредит долгосрочный, если он «мелкий», можно оценить как $\frac{35\%}{5\%+35\%}=\frac{7}{8}$.

Кейс 2 подзадача 2

1. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	5	30
«Средний»	20	15
«Крупный»	10	20

Выдан долгосрочный кредит. Установите соответствие между видом кредита и вероятностью его выдачи.

1. «Крупный»
2. «Средний»
3. «Мелкий»

$\frac{4}{13}$ - 1

$\frac{3}{13}$ - 2

$\frac{6}{13}$ - 3

$\frac{2}{7}$

$\frac{4}{7}$

Решение:

1. Вероятность того, что кредит «крупный», если он долгосрочный, можно оценить как $\frac{20\%}{30\% + 15\% + 20\%} = \frac{4}{13}$.
2. Вероятность того, что кредит «средний», если он долгосрочный, можно оценить как $\frac{15\%}{30\% + 15\% + 20\%} = \frac{3}{13}$.
3. Вероятность того, что кредит «мелкий», если он долгосрочный, можно оценить как $\frac{30\%}{30\% + 15\% + 20\%} = \frac{6}{13}$.

2. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	10	30
«Средний»	15	15
«Крупный»	25	5

Выдан краткосрочный кредит. Установите соответствие между видом кредита и вероятностью его выдачи.

1. «Крупный»
2. «Средний»
3. «Мелкий»

$\frac{1}{2}$ - 1

$\frac{3}{10}$ - 2

$\frac{2}{10}$ - 3

$\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$

Решение:

1. Вероятность того, что кредит «крупный», если он краткосрочный, можно оценить как $\frac{25\%}{25\%+15\%+10\%}=\frac{1}{2}$.
2. Вероятность того, что кредит «средний», если он краткосрочный, можно оценить как $\frac{15\%}{25\%+15\%+10\%}=\frac{3}{10}$.
3. Вероятность того, что кредит «мелкий», если он краткосрочный, можно оценить как $\frac{10\%}{25\%+15\%+10\%}=\frac{2}{10}$.

3. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	5	35
«Средний»	15	15
«Крупный»	20	10

Выдан краткосрочный кредит. Установите соответствие между видом кредита и вероятностью его выдачи.

1. «Крупный»
2. «Средний»
3. «Мелкий»

$\frac{1}{6}$ - 1

$\frac{1}{4}$ - 2

$\frac{7}{12}$ - 3

$\frac{7}{20}$

$$\frac{1}{10}$$

Решение:

1. Вероятность того, что кредит «крупный», если он краткосрочный, можно оценить как $\frac{10\%}{35\%+15\%+10\%}=\frac{1}{6}$.

2. Вероятность того, что кредит «средний», если он краткосрочный, можно оценить как $\frac{15\%}{35\%+15\%+10\%}=\frac{1}{4}$.

3. Вероятность того, что кредит «мелкий», если он краткосрочный, можно оценить как $\frac{35\%}{35\%+15\%+10\%}=\frac{7}{12}$.

Кейс 2 подзадача 3

1. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	5	30
«Средний»	20	15
«Крупный»	10	20

В рассматриваемом периоде банк выдал 100 кредитов. Если средний размер кредита «Мелкий» был равен 100 тыс. руб., кредита «Средний» – 700 тыс. руб., кредита «Крупный» – 2 млн руб., то объем кредитного портфеля банка составит ____ млн руб.

88

Решение:

Объем кредитного портфеля банка составит:

$$\left(0{,}1\cdot\frac{5+30}{100}+0{,}7\cdot\frac{20+15}{100}+2\cdot\frac{10+20}{100}\right)\cdot 100=3{,}5+24{,}5+60=88$$ млн руб.

2. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	10	30
«Средний»	15	15
«Крупный»	25	5

В рассматриваемом периоде банк выдал 100 кредитов. Если средний размер кредита «Мелкий» был равен 100 тыс. руб., кредита «Средний» – 400 тыс. руб., кредита «Крупный» – 2 млн руб., то объем кредитного портфеля банка составит ____ млн руб.

76

Решение:
Объем кредитного портфеля банка составит:

$$\left(100\cdot\frac{10+30}{100}+400\cdot\frac{15+15}{100}+2000\cdot\frac{25+5}{100}\right)\cdot100=76000$$ тыс. руб., или 76 млн. руб.

3. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам (в % от общего числа кредитов): по величине и срокам.

	Краткосрочные	Долгосрочные
«Мелкий»	5	35
«Средний»	15	15
«Крупный»	20	10

В рассматриваемом периоде банк выдал 100 кредитов. Если средний размер кредита «Мелкий» был равен 100 тыс. руб., кредита «Средний» – 600 тыс. руб., кредита «Крупный» – 2 млн руб., то объем кредитного портфеля банка составит ____ млн руб.
82
Решение:
Объем кредитного портфеля банка составит:

$$\left(100\cdot\frac{5+35}{100}+600\cdot\frac{15+15}{100}+2000\cdot\frac{20+10}{100}\right)\cdot100=82000$$ тыс. руб., или 82 млн руб.

Кейс 3 подзадача 1
1. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,6. Каждый построенный дом окупает 80 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Предположим, что собранных средств будет достаточно для строительства *k* домов. Установите соответствие между значениями *k* и вероятностями соответствующих случайных событий.

1. *k* = 1
2. *k* = 2
3. *k* = 3
1. 0,288
2. 0,432
3. 0,216
0,6
0,36

Решение:
Пусть случайная величина X – количество домов, построенных компанией.
Воспользуемся формулой Бернулли $P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n=3$, $p=0,6$, $q=0,4$. Тогда:
1) $P_n(X=1)=C_3^1 pq^2 = 3\cdot0,6\cdot0,4^2 = 0,288$,

2) $P_n(X=2)=C_3^2p^2q=3\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4=0{,}432,$

3) $P_n(X=3)=p^3=0{,}6^3=0{,}216.$

2. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,9. Каждый построенный дом окупает 50 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Предположим, что собранных средств будет достаточно для строительства *k* домов. Установите соответствие между значениями *k* и вероятностями соответствующих случайных событий.

1. *k* = 1
2. *k* = 2
3. *k* = 3

1 - 0,027
2 - 0,243
3 - 0,729
0,9
0,81

Решение:

Пусть случайная величина X – количество домов, построенных компанией.

Воспользуемся формулой Бернулли $P_n(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},$ где $n=3,\ \ p=0{,}9,$ $q=0{,}1.$ Тогда:

1) $P_n(X=1)=C_3^1pq^2=3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1^2=0{,}027,$

2) $P_n(X=2)=C_3^2p^2q=3\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1=0{,}243,$

3) $P_n(X=3)=p^3=0{,}9^3=0{,}729.$

3. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,8. Каждый построенный дом окупает 60 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Предположим, что собранных средств будет достаточно для строительства *k* домов. Установите соответствие между значениями *k* и вероятностями соответствующих случайных событий.

1. *k* = 1
2. *k* = 2
3. *k* = 3

1 - 0,096
2 – 0,384
3 - 0,512
0,8
0,64

Решение:

Пусть случайная величина X – количество домов, построенных компанией.

Воспользуемся формулой Бернулли $P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n=3,\ p=0{,}8,$ $q=0{,}2.$ Тогда:

1) $P_n(X=1)=C_3^1 pq^2=3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^2=0{,}096,$

2) $P_n(X=2)=C_3^2 p^2 q=3\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2=0{,}384,$

3) $P_n(X=3)=p^3=0{,}8^3=0{,}512.$

4. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,7. Каждый построенный дом окупает 70 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Предположим, что собранных средств будет достаточно для строительства *k* домов. Установите соответствие между значениями *k* и вероятностями соответствующих случайных событий.

1. *k* = 1
2. *k* = 2
3. *k* = 3

1 - 0,189
2 - 0,441
3 - 0,343
0,7
0,49

Решение:

Пусть случайная величина X – количество домов, построенных компанией.

Воспользуемся формулой Бернулли $P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n=3,\ p=0{,}7,$ $q=0{,}3.$ Тогда:

1) $P_n(X=1)=C_3^1 pq^2=3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^2=0{,}189,$

2) $P_n(X=2)=C_3^2 p^2 q=3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3=0{,}441,$

3) $P_n(X=3)=p^3=0{,}7^3=0{,}343.$

Кейс 3 подзадача 2

1. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,6. Каждый построенный дом окупает 80 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Если обозначить через X количество построенных компанией домов, то случайную величину *S* – прибыль компании (в млн руб.) – можно определить как …

$S=400\cdot X-500$ - правильно

$S=500\cdot X-400$

$S=400\cdot X$

$S=500\cdot X$

Решение:
Так как каждый построенный дом окупает 80% всех затрат по проекту, а именно $0{,}8 \cdot 500 = 400$ млн руб., то прибыль компании можно определить как $S = 400 \cdot X - 500$.

2. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,9. Каждый построенный дом окупает 50 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Если обозначить через X количество построенных компанией домов, то случайную величину *S* – прибыль компании (в млн руб.) – можно определить как …

$S = 250 \cdot X - 500$ - правильно

$S = 500 \cdot X - 250$

$S = 250 \cdot X$

$S = 500 \cdot X$

Решение:
Так как каждый построенный дом окупает 50% всех затрат по проекту, а именно $0{,}5 \cdot 500 = 250$ млн руб., то прибыль компании можно определить как $S = 250 \cdot X - 500$.

3. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,8. Каждый построенный дом окупает 60 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Если обозначить через X количество построенных компанией домов, то случайную величину *S* – прибыль компании (в млн руб.) – можно определить как …

$S = 300 \cdot X - 500$ - правильно

$S = 500 \cdot X - 300$

$S = 300 \cdot X$

$S = 500 \cdot X$

Решение:
Так как каждый построенный дом окупает 60% всех затрат по проекту, а именно $0{,}6 \cdot 500 = 300$ млн руб., то прибыль компании можно определить как $S = 300 \cdot X - 500$.

4. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,7. Каждый построенный дом окупает 70 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Если обозначить через X количество построенных компанией домов, то случайную величину *S* – прибыль компании (в млн руб.) – можно определить как …

$S = 350 \cdot X - 500$ - правильно

$S = 500 \cdot X - 350$

$S = 350 \cdot X$

$S = 500 \cdot X$

Решение:
Так как каждый построенный дом окупает 70% всех затрат по проекту, а именно $0{,}7 \cdot 500 = 350$ млн руб., то прибыль компании можно определить как
$S = 350 \cdot X - 500$.

Кейс 3 подзадача 3
1. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,6. Каждый построенный дом окупает 80 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Ожидаемая прибыль компании равна ____ млн руб.
220
Решение:
Составим закон распределения случайной величины *S* – прибыли компании:

S	$400 \cdot 0 - 500$	$400 \cdot 1 - 500$	$400 \cdot 2 - 500$	$400 \cdot 3 - 500$
p	0,064	0,288	0,432	0,216

Тогда ожидаемая прибыль компании равна
$M(S) = -500 \cdot 0{,}064 - 100 \cdot 0{,}288 + 300 \cdot 0{,}432 + 700 \cdot 0{,}216 = 220$ млн руб.

2. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,9. Каждый построенный дом окупает 50 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Ожидаемая прибыль компании равна ____ млн руб.
175
Решение:
Составим закон распределения случайной величины *S* – прибыли компании:

S	$250 \cdot 0 - 500$	$250 \cdot 1 - 500$	$250 \cdot 2 - 500$	$250 \cdot 3 - 500$
p	0,001	0,027	0,243	0,729

Тогда ожидаемая прибыль компании равна
$M(S) = -500 \cdot 0{,}001 - 250 \cdot 0{,}027 + 0 \cdot 0{,}243 + 250 \cdot 0{,}729 = 175$ млн руб.

3. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,8. Каждый построенный дом окупает 60 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Ожидаемая прибыль компании равна ____ млн руб.
220
Решение:
Составим закон распределения случайной величины *S* – прибыли компании:

S	$300 \cdot 0 - 500$	$300 \cdot 1 - 500$	$300 \cdot 2 - 500$	$300 \cdot 3 - 500$
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Тогда ожидаемая прибыль компании равна
$M(S) = -500 \cdot 0{,}008 - 200 \cdot 0{,}096 + 100 \cdot 0{,}384 + 400 \cdot 0{,}512 = 220$ млн руб.

4. Компания рассматривает проект по строительству трех домов, по одному в разных районах города. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки одного дома составляет 0,7. Каждый построенный дом окупает 70 % всех затрат компании по проекту, равных 500 млн руб.

Средняя ожидаемая прибыль компании равна ____ млн руб.
235
Решение:
Составим закон распределения случайной величины S – прибыли компании:

S	$350 \cdot 0 - 500$	$350 \cdot 1 - 500$	$350 \cdot 2 - 500$	$350 \cdot 3 - 500$
p	0,027	0,189	0,441	0,343

Тогда ожидаемая прибыль компании равна
$M(S) = -500 \cdot 0{,}027 - 150 \cdot 0{,}189 + 200 \cdot 0{,}441 + 550 \cdot 0{,}343 = 235$ млн руб.

Вопросы для самостоятельной подготовки

Тема 1. Классификация событий. Основные теоремы
Тема 2. Повторные независимые испытания
Тема 3. Дискретные случайные величины
Тема 4. Непрерывные случайные величины. Нормальный закон распределения
Тема 5. Двумерные (n-мерные) случайные величины
Тема 6. Закон больших чисел
Тема 7. Вариационные ряды
Тема 8. Основы выборочного метода
Тема 9. Элементы проверки статистических гипотез
Тема 10. Элементы теории корреляции

Кейсы и задачи для практических занятий

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Тема 1: Случайные события. Классификация событий.
Тема 2: Основные теоремы
ПЛАН
1. Определение вероятности. Элементы комбинаторики.
2. Сложение и умножение вероятностей.
3. Формулы полной вероятности и Байеса.
4. Тестовые задания.
5. Типовые задачи контрольной работы.

1. Определение вероятности. Элементы комбинаторики

Задача 1. При бросании игральной кости возможны шесть исходов – выпадение 1, 2, 3,4,5, 6 очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

Задача 2. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента- разрядники?

Задача 3. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

Задача 4. В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: а) одному потребителю; б) обоим потребителям поровну?

2. Сложение и умножение вероятностей

Задача 1. Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до одного года равна 0,13, а при эксплуатации сроком до 3 лет – 0,36. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от 1 года до 3 лет.

Задача 2. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишени 3 пробоины?

3. Формулы полной вероятности и Байеса

Задача 1. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев.

1. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

2. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

4. Тестовые задания

1. Всхожесть семян составляет 90%. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдет не менее 360.

Ответы: 0,5; 0,6; 0,4; 0,3.

2. Студент Иванов посещает лекции по математике с вероятностью 0,8, студент Петров с вероятностью 0,9, хотя бы один из них присутствует на каждой лекции. Какова вероятность того, что они встретились на лекции?

Ответы: 0,7; 0,5; 0,6; 0,8.

3. Какими из перечисленных свойств **не** могут обладать события A и B, если их вероятности равны соответственно 0,6 и 0,3.

Ответы: 1) образуют полную группу событий; 2) несовместны; 3) противоположны; 4) совместны.

4. Если наступление события B влечет за собой наступление события A, то $P(A{\cdot}B)$ равна:

Ответы: 1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) 0; 4) 1.

5. Игральную кость подбросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет не менее пяти очков?

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{3}$.

6. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель 0,85. Какова вероятность того, что отобранная для проверки пара отремонтирована качественно?

Ответы: 1) 0,42; 2) 0,87; 3) 0,78; 4) 0,75.

7. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 2% брака, второй 3% брака. Найти вероятность того, что наугад взятая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом, если с первого автомата поступило 1000 деталей, а со второго 2000.

Ответы: 1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,18; 4) 0,25.

5. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, второй- с вероятностью 0,7, а третий- с вероятностью 0,75. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Задача 2. Груз может быть отправлен заказчику самолетом, поездом или автомобилем. Все варианты равновозможны. Вероятность доставки груза к намеченному сроку равна соответственно 0,99, 0,98, 0,9.

1) Найти вероятность доставки груза к намеченному сроку.

2) Известно, что груз был доставлен заказчику в срок. Найти вероятность того, что он был отправлен поездом.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Тема 3: Повторные независимые испытания.

Тема 4: Дискретная случайная величина и её характеристики

ПЛАН

1. Последовательность независимых событий. Формула Пуассона, локальная и интегральные теоремы Муавра-Лапласа.
2. Дискретная случайная величина и ее закон распределения.
3. Тестовые задания.
4. Типовые задачи контрольной работы.

1. Последовательность независимых событий. Формула Пуассона, локальная и интегральные теоремы Муавра-Лапласа

Задача 1. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Задача 2. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Задача 3. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Вычислить вероятность того, что от 300 до 360 (включительно) семей из 400 имеют холодильники.

2. Дискретная случайная величина и ее закон распределения

Задача 1. Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Задача 2. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,5	0,5

Найти закон распределения случайных величин: а) Y = 3X; б) Z = X^2.

3. Тестовые задания

1. Завод производит мобильные телефоны. Вероятность того, что выпущенный телефон бракованный, равна 0,1. Найти вероятность того, что в партии из 900 телефонов окажется хотя бы 90 бракованных.

Ответы: 1) 0,4232; 2) 0,0269; 3) 0,5; 4) 0,19945.

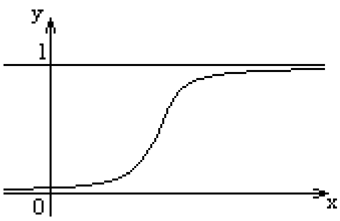
2. Найти $P(X=2)$, если закон распределения случайной величины X имеет вид:

	1		
	,2		,7

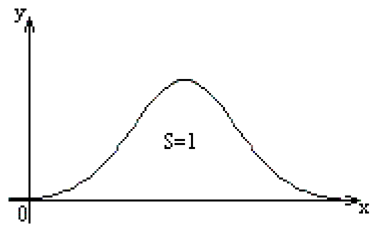
Ответы: 1) 0,1; 2) 0,3; 3) 0,2; 4) 0,9

3. Укажите рисунки, на которых изображены функции распределения случайных величин.

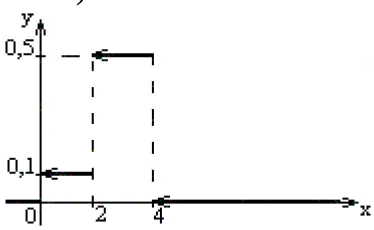
Ответы:



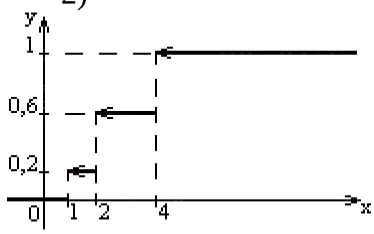
1)



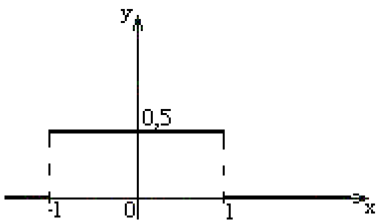
2)



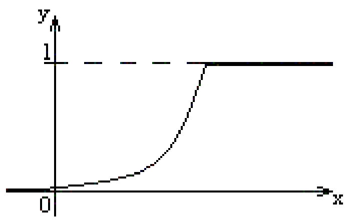
3)



4)



5)



6)

4. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. Вероятность того, что деталь не проверялась ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется от 70 до 100 деталей, не проверенных ОТК.

Задача 2. Баскетболист попадает в корзину с вероятностью 0,7. Составить закон распределения числа попаданий, если выполнено 4 броска. Построить график функции распределения этой случайной величины.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Тема 4. Дискретная случайная величина и ее характеристики.

Тема 5: Непрерывные случайные величины.

Нормальный закон распределения

ПЛАН

1. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.
2. Функция распределения и плотность вероятности.
3. Математическое ожидание и дисперсия. Нормальный закон распределения.
4. Тестовые задания (LAN-тестинг).
5. Типовые задачи контрольной работы.
6. Тестовые задания (ФЭПО).

1. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Задача 1. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,5	0,5

Вычислить M(X) и M(Y), D(X), D(Y) и σ(X), σ(Y), если Y = 3X и $Z = X^2$.

Задача 2. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу четырех приборов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Функция распределения и плотность вероятности

Задача 1. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

3. Математическое ожидание и дисперсия. Нормальный закон распределения

Задача 1. Функция φ(x) задана в виде:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 \ при \ x\le 1\\ \dfrac{A}{x^4} \ при \ x\succ 1\end{cases}.$$

Найти: а) значение постоянной A, при которой функция будет плотностью вероятности некоторой случайной величины X; б) выражение функции распределения F(x); в) вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение на отрезке [2;3]; г) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

4. Тестовые задания

1. Найти дисперсию $D(4X–3)$, если плотность случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

Ответы: 1) 32 2) 30 3) 2 4) 4.

2. Под наблюдением ветеринара в зоопарке находится 300 животных. Вероятность того, что в течение дня животному потребуется помощь, равна 0,1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число вызовов, поступивших в течение дня, отклонится от своего среднего значения более чем на 6 (по абсолютной величине).

Ответы: 1) $\le 0{,}75$; 2) $\ge 0{,}25$; 3) $\ge 0{,}75$;

3. В данной местности среднее значение скорости ветра у земли равно 4 м/сек. Используя лемму Чебышева, оценить вероятность того, что в заданный день скорость ветра при одном наблюдении не превысит 16 м/сек.

Ответы: 1) $\ge 0{,}75$; 2) $\le 0{,}25$; 3) $\ge 0{,}95$.

5. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. Среднее значение длины детали равно 50 см. Пользуясь леммой Чебышева (неравенством Маркова), оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине: а) более 49,5 см; б) не более 50,5 см.

Задача 2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ при \ x\le 0\\ \dfrac{1}{8}x^3 \ при \ 0\prec x\le 2\\ 1 \ при \ x\succ 2\end{cases}.$$

Найти:

а) плотность вероятности случайной величины X;

б) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X);

в) вероятность P(0 < X < 1);

г) построить графики функции распределения и плотности вероятности случайной величины X.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Тема 7. Закон больших чисел.

Тема 8: Оценка доли признака и генеральной средней

ПЛАН

1. Лемма и неравенство Чебышева.
2. Оценка генеральной доли по собственно-случайной выборке.
3. Интервальная оценка параметров.
4. Доверительные вероятности доли признака.
5. Тестовые задания (LAN-тестинг).
6. Типовые задачи контрольной работы.
7. Тестовые задания (ФЭПО).

1. Лемма и неравенство Чебышева

Задача 1. Сколько надо провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более, чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5?

2. Оценка генеральной доли по собственно-случайной выборке

Задача 1. Из партии, содержащей 2000 деталей, для проверки по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 200 деталей, среди которых оказалось 184 стандартных. Найти: а) вероятность того, что доля нестандартных деталей во всей партии отличается от полученной доли в выборке не более чем на 0,02 (по абсолютной величине); б) границы, в которых с надежностью 0,95 заключена доля нестандартных деталей во всей партии.

3. Интервальная оценка параметров

Задача 1. При обследовании выработки 1000 рабочих цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим по схеме собственно-случайной выборки было отобрано 100 рабочих. Необходимо определить: а) вероятность того, что средняя выработка рабочих цеха отличается от средней выборочной не более, чем на 1% (по абсолютной величине); б) границы, в которых с вероятностью 0,9545 заключена средняя выработка рабочих цеха. Рассмотреть случаи повторной и бесповторной выборки.

4. Доверительные вероятности для доли признака

Задача 1. Из 5000 вкладчиков банка по схеме случайной бесповторной выборки было отобрано 300 вкладчиков. Средний размер вклада в выборке составил 8000 руб., а среднее квадратическое отклонение 2500 руб. Какова вероятность того, что средний размер вклада случайно выбранного вкладчика отличается от его среднего размера в выборке не более, чем на 100 руб. (по абсолютной величине).

5. Тестовые задания

1. Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,9545 заключена генеральная доля, если по результатам повторной выборки объема 100 получена выборочная доля $w = 0{,}5$.

Ответы: 1) (0,05; 0,95); 2) (0,1; 0,5); 3) (0,4; 0,6); 4) (0,1; 0,9).

2. Как изменится доверительный интервал, если объем выборки оставить прежним, а доверительную вероятность уменьшить?

Ответы: 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится

3. Какие из перечисленных величин являются неслучайными величинами?

Ответы: 1) выборочная доля; 2) генеральная доля;
3) выборочная дисперсия; 4) генеральная средняя

6. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 120 предприятий из 1000. Результаты обследования роста их валовой продукции приведены в таблице:

Валовая продукция в отчетном году	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	Итого
Число предприятий	8	15	35	29	18	15	120

Найти: а) с вероятностью 0,874 границы для среднего процента роста валовой продукции всех предприятий; б) вероятность того, что выборочная доля предприятий, рост валовой продукции которых составил не менее 50%, отличается от доли таких предприятий в генеральной совокупности, не более чем на 0,1 (по абсолютной величине); объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего процента роста валовой продукции (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

Задача 2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – валовая продукция - распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Тема 9: Оценка доли признака и генеральной средней.

Тема 10. Элементы статистической проверки гипотез.

ПЛАН

1. Оценка генеральной средней по собственно-случайной выборке.
2. Интервальная оценка параметров.
3. Доверительные вероятности для средней.
4. Статистическая проверка гипотез.
5. Тестовые задания (LAN-тестинг).
6. Типовые задачи контрольной работы.
7. Тестовые задания (ФЭПО).

1. Оценка генеральной средней по собственно-случайной выборке

Задача 1. Найти несмещенную и состоятельную оценку средней выработки рабочих цеха по данным выборки, представленной в таблице

i	Выработка в отчетном году в процентах к	Частота (количество рабочих)	Частость (доля рабочих)	Накопленная частота $n_i^{нак}$	Накопленная частость

	предыдущему х	n_i	$w_i = \frac{n_i}{n}$		$w_i^{нак} = \frac{n_i^{нак}}{n}$
1	94,0 – 100,0	3	0,03	3	0,03
2	100,0 – 106,0	7	0,07	10	0,10
3	106,0 – 112,0	11	0,11	21	0,21
4	112,0 – 118,0	20	0,20	41	0,41
5	118,0 – 124,0	28	0,28	69	0,69
6	124,0 – 130,0	19	0,19	88	0,88
7	130,0 – 136,0	10	0,10	98	0,98
8	136,0 – 142,0	2	0,02	100	1,00
Σ		100	1,00		

2. Интервальная оценка параметров

Задача 1. При обследовании выработки 1000 рабочих цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим по схеме собственно-случайной выборки было отобрано 100 рабочих. Необходимо определить: а) вероятность того, что средняя выработка рабочих цеха отличается от средней выборочной не более, чем на 1% (по абсолютной величине); б) границы, в которых с вероятностью 0,9545 заключена средняя выработка рабочих цеха. Рассмотреть случаи повторной и бесповторной выборки.

3. Доверительные вероятности для средней

Задача 1. Из 5000 вкладчиков банка по схеме случайной бесповторной выборки было отобрано 300 вкладчиков. Средний размер вклада в выборке составил 8000 руб., а среднее квадратическое отклонение 2500 руб. Какова вероятность того, что средний размер вклада случайно выбранного вкладчика отличается от его среднего размера в выборке не более, чем на 100 руб. (по абсолютной величине).

4. Статистическая проверка гипотез

Задача 1. Для проверки эффективности новой технологии отобраны две группы рабочих: в первой группе численностью $n_1 = 50$ чел., где применялась новая технология, выборочная средняя выработка составила $x = 85$ (изделий), во второй группе численностью $n_2=70$ чел. Выборочная средняя $y = 78$ (изделий). Предварительно установлено, что дисперсии выработки в группах равны соответственно $\sigma^2_x = 100$ и $\sigma^2_y = 74$. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ выяснить влияние новой технологии на среднюю производительность.

5. Тестовые задания (LAN-тестинг)

1. Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,9545 заключена генеральная средняя, если по результатам повторной выборки объема 100 получена выборочная средняя $x = 0,5$.

Ответы: 1) (0,05; 0,95); 2) (0,1; 0,5); 3) (0,4; 0,6); 4) (0,1; 0,9).

2. Как изменится доверительный интервал, если объем выборки оставить прежним, а доверительную вероятность уменьшить?

Ответы: 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится

3. Какие из перечисленных величин являются неслучайными величинами?

Ответы: 1) выборочная доля; 2) генеральная доля; 3) выборочная дисперсия; 4) генеральная средняя

6. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 120 предприятий из 1000. Результаты обследования роста их валовой продукции приведены в таблице:

Валовая продукция в отчетном году	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	Итого
Число предприятий	8	15	35	29	18	15	120

Найти: а) с вероятностью 0,874 границы для среднего процента роста валовой продукции всех предприятий; б) вероятность того, что выборочная средняя предприятий, рост валовой продукции которых составил не менее 50%, отличается от средней таких предприятий в генеральной совокупности, не более чем на 0,1 (по абсолютной величине); объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего процента роста валовой продукции (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

Задача 2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – валовая продукция - распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Тема 11: Элементы теории корреляции.

ПЛАН

1. Уравнения регрессии.
2. Определение формы и оценка тесноты связи. Линейная парная регрессия.
3. Выборочный коэффициент корреляции, его свойства и оценка достоверности.
4. Тестовые задания.
5. Типовые задачи контрольной работы.

1. Уравнения регрессии

Задача 1. По данным таблицы

Величина ОПФ млн.	Середины интервалов	Суточная выработка продукции					Всего	Групповая средняя y_i
		7-	11-	15-	19-	23-		

руб.		11	15	19	23	27	n_i	
	X_i Y_j	9	13	17	21	25		
20-25	22,5	2	1	-	-	-	3	10,3
25-30	27,5	3	6	4	-	-	13	13,3
30-35	32,5	-	3	11	7	-	21	17,8
35-40	37,5	-	1	2	6	2	11	20,3
40-45	42,5	-	-	-	1	1	2	23
Всего n_j		5	11	17	14	3	50	-
Групповая средняя млн. руб. x_j		25,5	29,3	31,9	35,4	39,2	-	-

Найти уравнения регрессии Y по и X по Y и пояснить их смысл.

2. Определение формы и оценка тесноты связи.

Линейная парная регрессия

Задача 1. При исследовании корреляционной зависимости между объемом валовой продукции Y (млн. руб.) и среднесуточной численностью работающих X (тыс. чел.) для ряда предприятий отрасли получено следующее уравнение регрессии X по Y: $x_y = 0,2y - 2,5$. Коэффициент корреляции между этими признаками оказался равным 0,8, а средний объем валовой продукции предприятий составил 40 млн руб. Найти: а) среднее значение среднесуточной численности работающих на предприятиях; б) уравнение регрессии У по X; в) средний объем валовой продукции на предприятиях со среднесуточной численностью работающих 4 тыс. чел.

3. Выборочный коэффициент корреляции,

его свойства и оценка достоверности

Задача 1. Вычислить коэффициент корреляции между величиной основных производственных фондов X и суточной выработкой продукции У (по данным таблицы):

Величина ОПФ млн. руб.	Середины интервалов	Суточная выработка продукции					Всего n_i	Групповая средняя y_i
		7-11	11-15	15-19	19-23	23-27		
	X_i Y_j	9	13	17	21	25		

20-25	22,5	2	1	-	-	-	3	10,3
25-30	27,5	3	6	4	-	-	13	13,3
30-35	32,5	-	3	11	7	-	21	17,8
35-40	37,5	-	1	2	6	2	11	20,3
40-45	42,5	-	-	-	1	1	2	23
Всего n_j		5	11	17	14	3	50	-
Групповая средняя млн. руб. x_j		25,5	29,3	31,9	35,4	39,2	-	-

4. Тестовые задания

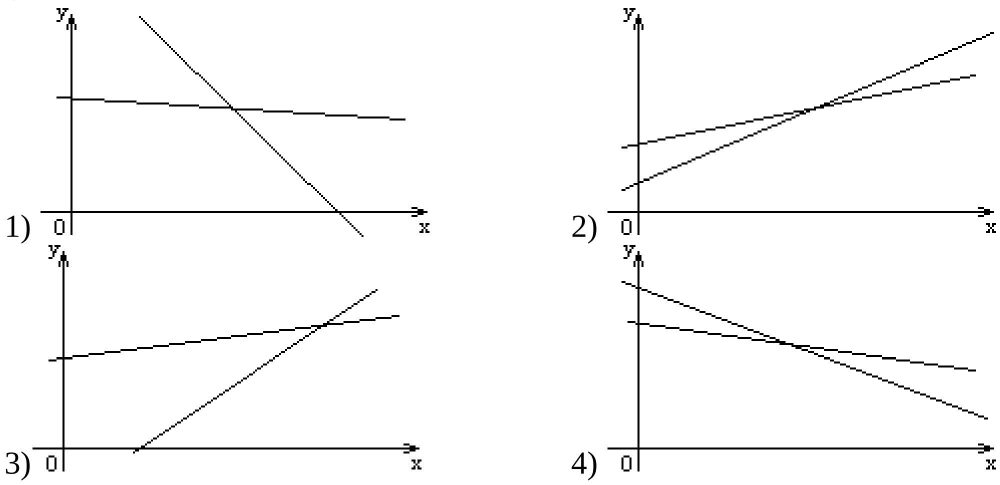
1. В задачах были вычислены коэффициенты регрессии b_{xy} и b_{yx}. В каких задачах допущены ошибки?

Ответы: 1) $b_{xy} = -0,3$ и $b_{yx} = -1,5$; 2) $b_{xy} = 3,21$ и $b_{yx} = 0,18$;

3) $b_{xy} = -0,25$ и $b_{yx} = 2,67$; 4) $b_{xy} = 0,3$ и $b_{yx} = 5$.

2. На рисунках изображены прямые регрессии с коэффициентами корреляции $|r| = 0,3$ и $|r| = 0,8$. Какой рисунок соответствует коэффициенту корреляции $r = -0,8$.

Ответы:



3. При исследовании корреляционной зависимости между объемом производства X и доходами от реализации продукции Y получены следующие уравнения регрессии: $y = 0,3x + 120$ и $x = 1,6y - 88$. Найти выборочный коэффициент корреляции между величинами X и Y.

Ответы: 1) 0,48; 2) 0,69; 3) – 0,69; 4) – 0,49.

5. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. Распределение 50 предприятий по выпуску продукции Х (тыс. шт.) и издержкам на единицу продукции У (тыс. руб.) представлено в таблице:

Х У	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	Итого
2-6	2	-	2	-	-	-	-	4
6-10	-	1	4	-	-	-	-	5
10-14	-	4	3	10	-	-	-	17
14-18	-	2	-	2	3	6	-	13
18-22	-	-	-	-	5	4	-	9
22-26	-	-	-	-	-	1	1	2
Итого	2	7	9	12	8	11	1	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x_i}$ и $\overline{y_j}$ и построить эмпирические линии регрессии.

2) Предполагая, что между переменными Х и У существует линейная корреляционная зависимость: а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений; б) вычислить коэффициент корреляции, на уровне $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными Х и У; в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средние издержки на единицу продукции предприятия, выпуск которого составляет 24 тыс. шт.

Задача 1. Менеджер компании, занимающейся прокатом автомобилей, хочет оценить среднюю величину пробега одного автомобиля в течение месяца. Из 280 автомобилей, принадлежащих компании, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 60. Результаты представлены в таблице:

Пробег (км)	Менее 1000	1000 - 2000	2000 - 3000	3000 - 4000	4000 - 5000	5000 - 6000	Более 6000	Итого
Число автомобилей	3	5	9	16	13	8	6	60

Определить:

а) вероятность того, что средний пробег автомобиля в месяц отличается от среднего их пробега в выборке не более чем на 400 км (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля автомобилей, пробег которых составляет менее 3000 км;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для указанной доли можно гарантировать с вероятностью 0,9876; дать ответ на тот же вопрос, если никаких предварительных сведений о рассматриваемой доли нет

Решение. По условию задачи, объем генеральной совокупности N=280, объем бесповторной выборки n=60. Число интервалов l=7. Для вычисления характеристик выборки условно считаем правую границу последнего интервала равной 6000 +1000 = 7000 , так как величина предыдущих интервалов равна 1000.

1. Находим выборочную среднюю по формуле $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_i}{n}$, где x_i - середины соответствующих интервалов, n_i - соответствующие частоты.

$$\bar{x} = \frac{500 \cdot 3 + 1500 \cdot 5 + 2500 \cdot 9 + 3500 \cdot 16 + 4500 \cdot 13 + 5500 \cdot 8 + 6500 \cdot 6}{60} = \frac{229000}{60} \approx 3816{,}67$$

(км).

2. Находим выборочную дисперсию по формуле $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{l} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n}$.

$$s^2 = \frac{3316{,}67^2 \cdot 3 + 2316{,}67^2 \cdot 5 + 1316{,}67^2 \cdot 9 + 316{,}67^2 \cdot 16 + 683{,}33^2 \cdot 13 + 1683{,}33^2 \cdot 8 + 2683{,}33^2 \cdot 6}{60} \approx$$

$\approx 2483055{,}6$.

а) определяем вероятность того, что средний пробег автомобиля в месяц отличается от среднего их пробега в выборке не более чем на 400 км (по абсолютной величине). Для этого:

1. Вычисляем среднюю квадратическую ошибку бесповторной выборки для средней по формуле $\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$. Имеем

$$\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{2483055{,}6}{60} \cdot \left(1 - \frac{60}{280}\right)} \approx \sqrt{32516{,}2} \approx 180{,}32 .$$

2. По условию задачи, предельная ошибка выборки Δ=400 (км). Искомую вероятность находим по формуле доверительной вероятности при оценке генеральной средней для бесповторной выборки $P\left(\left| \bar{x} - \bar{x}_0 \right| \le \Delta\right) = \Phi(t) = \gamma$, где $t = \frac{\Delta}{\sigma'_{\bar{x}}}$.

Итак, $P\left(\left|\bar{x}_0 - 3816{,}67\right| \le 400\right) = \Phi\left(\frac{400}{180{,}32}\right) \approx \Phi(2{,}22) \approx 0{,}9736$.

б) находим границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля автомобилей, пробег которых составляет менее 3000 км.

1. Указанным признаком обладает 17 автомобилей, так как $m=n_1+n_2+n_3$ =3+5+9=17. Находим выборочную долю по формуле $w = \frac{m}{n}$. Следовательно, $w = \frac{17}{60} \approx 0{,}2833$.

2. Вычисляем среднюю квадратическую ошибку бесповторной выборки для доли по формуле $\sigma'_w \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$. Имеем $\sigma'_w \approx \sqrt{\frac{0{,}2833 \cdot (1 - 0{,}2833)}{60} \cdot \left(1 - \frac{60}{280}\right)} \approx$ $\approx \sqrt{0{,}002659} \approx 0{,}05157$.

3. Находим значение параметра t из формулы Φ(t)=γ. По условию задачи γ=0,95. По таблице значений функции Лапласа определяем, что t=1,96.

4. Вычисляем предельную ошибку бесповторной выборки из формулы доверительной вероятности при оценке генеральной доли $P\left(\left| w-p \right| \le \Delta\right)=\Phi(t)=\gamma$, где $t=\dfrac{\Delta}{\sigma'_w}$. Получаем $\Delta=t\cdot\sigma'_w$, т.е. Δ=1,96·0,05157≈0,1011.

5. Находим доверительные границы для генеральной доли по формуле: $w-\Delta \le p \le w+\Delta$. Получаем 0,2833-0,1011≤*p*≤0,2833-0,1011.

Следовательно, 0,1822≤*p*≤0,3844.

в) находим объем выборки, чтобы с вероятностью 0,9876 гарантировать те же границы для доли автомобилей, пробег которых составляет менее 3000 км.

1. Находим значение параметра *t* из условия Φ(*t*)=γ. Дано, что γ=0,9876. По таблице значений функции Лапласа определяем, что *t*=2,5.

2. Вычисляем объем бесповторной выборки для оценки генеральной доли по формуле $n' \approx \dfrac{N\cdot t^2 w(1-w)}{t^2 w(1-w)+N\Delta^2}$.

Имеем $n' \approx \dfrac{280\cdot 2{,}5^2\cdot 0{,}2833\cdot(1-0{,}2833)}{2{,}5^2\cdot 0{,}2833\cdot(1-0{,}2833)+280\cdot 0{,}1011^2} \approx \dfrac{280\cdot 1{,}269}{1{,}269+2{,}862} \approx \dfrac{355{,}32}{4{,}131} \approx 87$.

Если никаких предварительных сведений о рассматриваемой доли нет, то в качестве *w*·(1-*w*) берем его максимально возможное значение 0,25.

Получаем $n' \approx \dfrac{280\cdot 2{,}5^2\cdot 0{,}25}{2{,}5^2\cdot 0{,}25+280\cdot 0{,}1011^2} \approx \dfrac{280\cdot 1{,}5625}{1{,}5625+2{,}862} \approx \dfrac{437{,}5}{4{,}424} \approx 99$.

Ответ.

а) вероятность того, что средний пробег автомобиля в месяц отличается от среднего их пробега в выборке не более чем на 400 км (по абсолютной величине), равна 0,9736.

б) с вероятностью 0,95 доля доли автомобилей, пробег которых составляет менее 3000 км, заключена в границах от 0,1822 до 0,3844;

в) для того, чтобы гарантировать с вероятностью 0,9876 те же границы для доли автомобилей, пробег которых составляет менее 3000 км, необходимо выбрать 87 автомобилей по схеме собственно случайной бесповторной выборки. Если никаких предварительных сведений о рассматриваемой доли нет, то необходимо выбрать 99 автомобилей по схеме собственно случайной бесповторной выборки.

Задача 2. По данным задачи 1, используя критерий χ^2 – Пирсона, при уровне значимости α=0,05, проверить гипотезу о том, что случайная величина *X* – пробег автомобиля в месяц – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

Решение. Запишем известные параметры: *n*=60, *N*=280, $\bar{x} \approx 3816{,}67$, $s^2 \approx 2483055{,}6$. Параметры теоретического нормального закона распределения *a* и σ^2, являющиеся соответственно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины *X*, неизвестны, поэтому заменяем их оценками по выборке – соответственно выборочной средней $\bar{x}$ и выборочной дисперсией s^2. Итак, считаем $a \approx \bar{x} \approx 3816{,}67$ и σ ≈ *s* ≈ 1575,77.

1. *Вычисляем статистику* χ^2, т.е. определяем меру расхождения эмпирических и теоретических частот. Для этого составляем таблицу, вычисления данных удобно проводить по столбцам таблицы, выполняя для каждого столбца одинаковые действия.

$[x_i;x_{i+1}]$	n_i	α_i	β_i	$\Phi(\alpha_i)$	$\Phi(\beta_i)$	p_i	$n\cdot p_i$	$(n_i-n\cdot p_i)^2$	$\frac{(n_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}$
менее 1000	3	-2,42	-1,79	-0,9845	-0,9265	0,029	7,038	0,9254	0,131
1000-2000	5	-1,79	-1,15	-0,9265	-0,7499	0,0883			
2000-3000	9	-1,15	-0,52	-0,7499	-0,3969	0,1765	10,59	2,5281	0,239
3000-4000	16	-0,52	0,12	-0,3969	0,0955	0,2462	14,772	1,508	0,102
4000-5000	13	0,12	0,75	0,0955	0,5467	0,2256	13,536	0,2873	0,021
5000-6000	8	0,75	1,39	0,5467	0,8355	0,1444	8,664	0,4409	0,051
более 6000	6	1,39	∞	0,8355	1	0,0823	4,938	1,1278	0,228
Σ	60					0,9923	59,538		0,772

а) вычисляем теоретические вероятности p_i. Для нахождения вероятностей p_i попадания значений случайной величины X в интервал $[x_i\ ;\ x_{i+1}]$, где $1 \le i \le 7$, вычисляем предварительно значения аргументов α_i , β_i и значения функции Лапласа $\Phi(\alpha_i)$, $\Phi(\beta_i)$ в этих точках:

$$p_i = p(x_i \le X \le x_{i+1}) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-\overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)\right].$$

Например, $p_1 = P(0 \le X \le 1000) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{1000-3816{,}67}{1575{,}77}\right) - \Phi\left(\frac{0-3816{,}67}{1575{,}77}\right)\right] \approx$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\Phi(-1{,}79) - \Phi(-2{,}42)\right] = \frac{1}{2}\left[-\Phi(1{,}79) + \Phi(2{,}42)\right] \approx \frac{1}{2}(-0{,}9265 + 0{,}9845) = 0{,}029 .$$

В силу нечетности функции $\Phi(x)$ выполняется $\Phi(-1{,}79) = -\Phi(1{,}79)$ и $\Phi(-2{,}42) = -\Phi(2{,}42)$, а значения $\Phi(1{,}79)$ и $\Phi(2{,}42)$ определены по таблице значений функции Лапласа.

При вычислении вероятности p_7 используем не условный интервал (6000; 7000), а данный в условии задачи бесконечный интервал $(6000; +\infty)$:

$$p_7 = P(X \ge 6000) = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{6000-3816{,}67}{1575{,}77}\right)\right] \approx \frac{1}{2}\left[1-\Phi(1{,}39)\right] \approx \frac{1}{2}\left[1-0{,}8355\right] \approx 0{,}0823$$

.

б) вычисляем теоретические частоты $n\cdot p_i$.

Учитывая, что в первом интервале число наблюдений меньше 5, при использовании критерия χ^2 – Пирсона целесообразно объединить этот интервал с соседним интервалом. Получаем, что соответствующая объединенному интервалу теоретическая частота $n\cdot(p_1+p_2)$ = $=60\cdot(0{,}029+0{,}0883)=7{,}038$. Вычисляем $n\cdot p_3=60\cdot 0{,}1765=10{,}59$ и так далее.

в) вычисляем значения величин $(n_i-n\cdot p_i)^2$.

Например, $[(n_1+ n_2)- n\cdot(p_1+ p_2)]^2=(8-7{,}038)^2 =0{,}962^2 =0{,}9254$.

г) вычисляем значения величин $\frac{(n_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}$. Например,

$$\frac{(n_3-n\cdot p_3)^2}{n\cdot p_3} = \frac{2{,}5281}{10{,}59} \approx 0{,}239 .$$

д) вычисляем статистику по формуле $\chi^2 = \sum_{i=1}^{l}\frac{(n_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}$.

Получаем: $\chi^2 \approx 0{,}131 + 0{,}239 + 0{,}102 + 0{,}021 + 0{,}051 + 0{,}228 = 0{,}772$. Итак, фактически наблюдаемое значение статистики $\chi^2 \approx 0{,}772$.

2. Для выбранного уровня значимости α по таблице χ^2-распределения *находим критическое значение* $\chi^2_{\alpha,k}$ при числе степеней свободы $k= l-s-1$ и уровне значимости $\alpha=0{,}05$.

Так как новое число интервалов после объединения l=6, а нормальный закон распределения определяется s=2 параметрами (которые мы оценили по выборке), то число степеней свободы k=6-2-1=3. Соответствующее критическое значение статистики χ^2 по таблице $\chi^2_{0,05;3}$=7,82.

3. Сравниваем полученные значения χ^2 и $\chi^2_{\alpha,k}$. Так как 0,772<7,82, то гипотеза о том, что случайная величина X - пробег автомобиля в месяц - распределена по нормальному закону распределения с параметрами a=3816,67 и σ^2=2483055,6 согласуется с опытными данными и не отвергается.

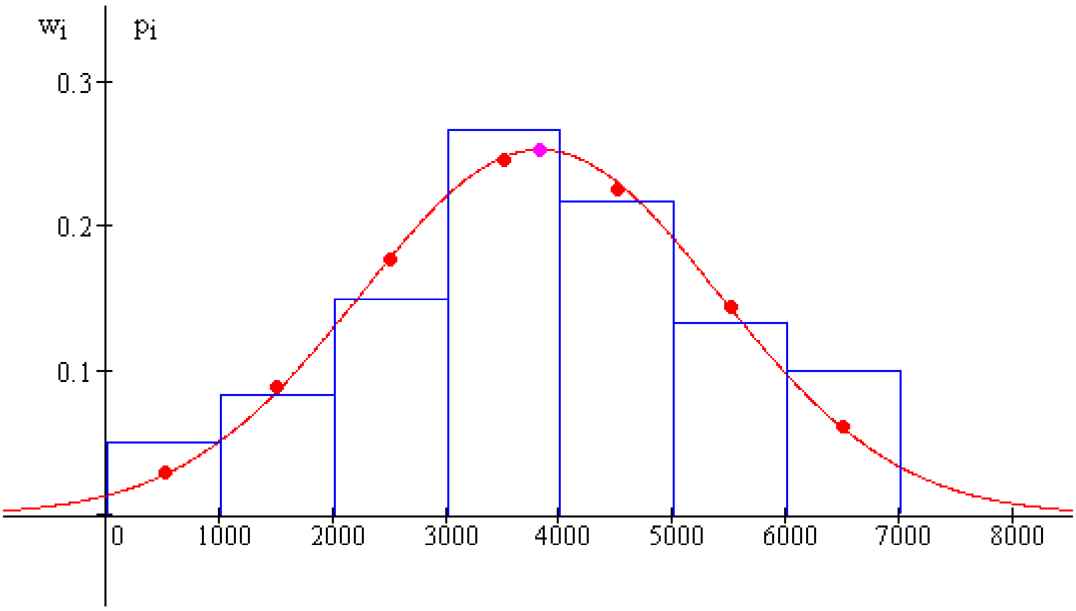
Построим на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую. Для этого необходимо выбрать одинаковый масштаб по оси ординат. Напомним, что статистическим аналогом понятия вероятность является частость.

Гистограммой называется ступенчатая фигура, состоящей из прямоугольников с основаниями, равными величинам интервалов $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, и высотами, равными частостям $w_i = \frac{n_i}{n}$ этих интервалов. Имеем w_1=0,05, $w_2\approx$0,08, w_3=0,15, $w_4\approx$0,27, $w_5\approx$0,22, $w_6\approx$0,13, w_7=0,1.

Для построения *нормальной кривой* используем приближенный способ построения по точкам (x_i;p_i), где для каждого интервала в качестве x_i берем середину интервала. Отмечаем точки (500; 0,029), (1500; 0,088), (2500; 0,176), (3500; 0,246), (4500; 0,226), (5500; 0,144), (6500; 0,082).

Максимум нормальной кривой будет в точке $x \approx \bar{x} \approx 3816,67$ и равен $\frac{\Delta x}{\sigma} \cdot f(0) \approx 0,3989 \cdot \frac{\Delta x}{s} \approx 0,3989 \cdot \frac{1000}{1575,77} \approx 0,253$, где Δx – длина интервала.

Выполнив чертеж, можно увидеть, что нормальная кривая теоретического распределения хорошо "выравнивает" гистограмму эмпирического распределения.



Задача 3. Распределение 100 коров по ежедневному надою X (литров) и проценту жирности их молока Y (%) представлено в таблице:

	3,5—3,6	3,6—3,7	3,7—3,8	3,8—3,9	3,9-4,0	4,0—4,1	Итого:
6—10				1	2	1	4
10—14			2	3		1	6
14—18	2	4	8	1	1	1	17
18—22	3	13	3				19

22—26	8	22	5				35
26—30		10	9				19
Итого:	13	49	27	5	3	3	100

Необходимо: 1) вычислить групповые средние $\overline{x}_j$ и $\overline{y}_i$, построить эмпирические линии регрессии; 2) предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость: а) найти уравнения прямых регрессии и построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии; б) вычислить коэффициент корреляции, на уровне α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y; в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить средний процент жирности молока у коров, дающих 30 литров.

Решение. 1. По условию задачи, корреляционная таблица имеет объем выборки n=100, при этом число интервалов по переменной X равно l=6, число интервалов по переменной Y равно m=6.

Вычисляем середины интервалов по переменной X. Например, $x_1 = \frac{6+10}{2} = 8$. Аналогично, x_2=12, x_3=16, x_4=20, x_5=24, x_6=28. Вычислим середины интервалов по переменной Y. Например, $y_1 = \frac{3,5+3,6}{2} = 3,55$. Аналогично, y_2=3,65, y_3=3,75, y_4=3,85, y_5=3,95, y_6=4,05 .

Вычисляем групповые средние $\overline{x}_j$ и $\overline{y}_i$ по формулам:

$$\overline{x}_j = \frac{1}{n_j} \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{ij} \quad \text{и} \quad \overline{y}_i = \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_{ij}\ .$$

$$\overline{x}_1 = \frac{16 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 24 \cdot 8}{13} = \frac{284}{13} = 21,85\ ;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{16 \cdot 4 + 20 \cdot 13 + 24 \cdot 22 + 28 \cdot 10}{49} = \frac{1132}{49} = 23,10\ .$$

Далее получаем $\overline{x}_3 = 21,63$, $\overline{x}_4 = 12$, $\overline{x}_5 = 10,67$, $\overline{x}_6 = 12$.

$$\overline{y}_1 = \frac{3,85 \cdot 1 + 3,95 \cdot 2 + 4,05 \cdot 1}{4} = \frac{15,8}{4} = 3,95\ ;$$

$$\overline{y}_2 = \frac{3,75 \cdot 2 + 3,85 \cdot 3 + 4,05 \cdot 1}{6} = \frac{23,1}{6} = 3,85\ .$$

Далее получаем $\overline{y}_3 = 3,74$, $\overline{y}_4 = 3,65$, $\overline{y}_5 = 3,64$, $\overline{y}_6 = 3,7$.

Построим эмпирические линии регрессии.

Линия регрессии Y по X – это ломаная, соединяющая точки с координатами $\left(x_i; \overline{y}_i\right)$. Соединяем ломаной точки: (8; 3,95), (12; 3,85), (16; 3,74), (20; 3,65), (24; 3,64), (28; 3,7).

Линия регрессии X по Y – это ломаная, соединяющая точки с координатами $\left(\overline{x}_j; y_j\right)$. Соединяем ломаной точки: (21,85; 3,55), (23,10; 3,65), (21,63; 3,75), (12; 3,85), (10,67; 3,95), (12; 4,05).

2. Предположим, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость.

а) находим уравнения прямых регрессии.

Для этого сначала вычисляем все необходимые суммы:

$$\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_i = 8 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + 16 \cdot 17 + 20 \cdot 19 + 24 \cdot 35 + 28 \cdot 19 = 2128\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_i = 8^2 \cdot 4 + 12^2 \cdot 6 + 16^2 \cdot 17 + 20^2 \cdot 19 + 24^2 \cdot 35 + 28^2 \cdot 19 = 48128 ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_j = 3,55 \cdot 13 + 3,65 \cdot 49 + 3,75 \cdot 27 + 3,85 \cdot 5 + 3,95 \cdot 3 + 4,05 \cdot 3 = 369,5 ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot n_j = 3,55^2 \cdot 13 + 3,65^2 \cdot 49 + 3,75^2 \cdot 27 + 3,85^2 \cdot 5 + 3,95^2 \cdot 3 + 4,05^2 \cdot 3 = 1366,45 ,$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij} = (8 \cdot 3,85 \cdot 1 + 8 \cdot 3,95 \cdot 2 + 8 \cdot 4,05 \cdot 1) + (12 \cdot 3,75 \cdot 2 + 12 \cdot 3,85 \cdot 3 + 12 \cdot 4,05 \cdot 1) +$$
$$+16 \cdot (3,55 \cdot 2 + 3,65 \cdot 4 + 3,75 \cdot 8 + 3,85 \cdot 1 + 3,95 \cdot 1 + 4,05 \cdot 1) + 20 \cdot (3,55 \cdot 3 + 3,65 \cdot 13 + 3,75 \cdot 3) +$$
$$+24 \cdot (3,55 \cdot 8 + 3,65 \cdot 22 + 3,75 \cdot 5) + 28 \cdot (3,65 \cdot 10 + 3,75 \cdot 9) = 7833,2 .$$

Далее вычисляем выборочные характеристики по формулам:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_i , \qquad \overline{x} = \frac{1}{100} \cdot 2128 = 21,28 \text{ (л)} ;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_i , \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{100} \cdot 48128 = 481,28 ;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_j , \qquad \overline{y} = \frac{1}{100} \cdot 369,5 = 3,695 \text{ (\%)} ;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot n_j , \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{100} \cdot 1366,45 = 13,6645 ;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij} , \qquad \overline{xy} = \frac{1}{100} \cdot 7833,2 = 78,332 ;$$

$s_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, $s_x^2 = 481,28 - 21,28^2 = 28,4416$ (выборочная дисперсия переменной X);

$s_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$, $s_y^2 = 13,6645 - 3,695^2 = 0,011475$ (выборочная дисперсия переменной Y);

$\mu = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$, $\mu = 78,332 - 21,28 \cdot 3,695 = -0,2976$ (выборочная ковариация);

$\rho_{yx} = \dfrac{\mu}{s_x^2}$, $\rho_{yx} = \dfrac{-0,2976}{28,4416} = -0,0105$ (выборочный коэффициент регрессии Y по X);

$\rho_{xy} = \dfrac{\mu}{s_y^2}$, $\rho_{xy} = \dfrac{-0,2976}{0,011475} = -25,9346$ (выборочный коэффициент регрессии X по Y).

Следовательно, уравнения прямых регрессии имеют вид:

Y по X : $y - \overline{y} = \rho_{yx} \cdot (x - \overline{x})$, $y - 3,695 = -0,0105 \cdot (x - 21,28)$ или $y = -0,0105 \cdot x + 3,918$;

X по Y : $x - \overline{x} = \rho_{xy} \cdot (y - \overline{y})$, $x - 21,28 = -25,9346 \cdot (y - 3,695)$ или $x = -25,9346 \cdot y + 117,108$.

Отметим, что прямые регрессии пересекаются в точке $(\overline{x}; \overline{y})$, т.е. (21,28; 3,695). Прямая регрессии Y по X проходит также через точку (0; 3,918). Прямая регрессии X по Y проходит также, например, через точку (13,37; 4).

б) вычислим выборочный коэффициент корреляции.

Коэффициент корреляции r можно найти из условия $r^2=\rho_{yx}\cdot\rho_{xy}$, учитывая, что он имеет тот же знак, который имеют выборочные коэффициенты прямых регрессии. Итак, $r=-\sqrt{\rho_{yx}\cdot\rho_{xy}}$, $r=-\sqrt{(-0,0105)\cdot(-25,9346)}\approx-0,5218$.

Оценим значимость коэффициента корреляции на уровне α=0,05 по критерию Стьюдента. Для этого:

- вычисляем статистику по формуле $t=\dfrac{r\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$. Получаем $t=\dfrac{-0,5218\cdot\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-(-0,5218)^2}}\approx-6,06$;

- находим критическое значение статистики $t_{1-\alpha;k}$ (с k=n-2 степенями свободы) по таблице значений критерия Стьюдента: $t_{0,95;98}\approx 1,99$;

- сравниваем полученные значения t и $t_{1-\alpha;k}$. Так как $|t|=|-6,06|=6,06>1,99$, то коэффициент корреляции между процентом жирности Y молока коров и ежедневным надоем X значимо отличается от нуля на уровне значимости α=0,05.

Итак, имеет место достаточно тесная связь между переменными X и Y. Так как с увеличением значений X происходит уменьшение значений Y , то имеет место обратная корреляционная связь.

в) определим средний процент жирности молока у коров, дающих 30 литров.

Для этого используем уравнение регрессии $y=-0,0105\cdot x+3,918$ величины Y по X . Получаем $y=-0,0105\cdot 30+3,918=3,603\approx 3,6$ (%).

Ответ.

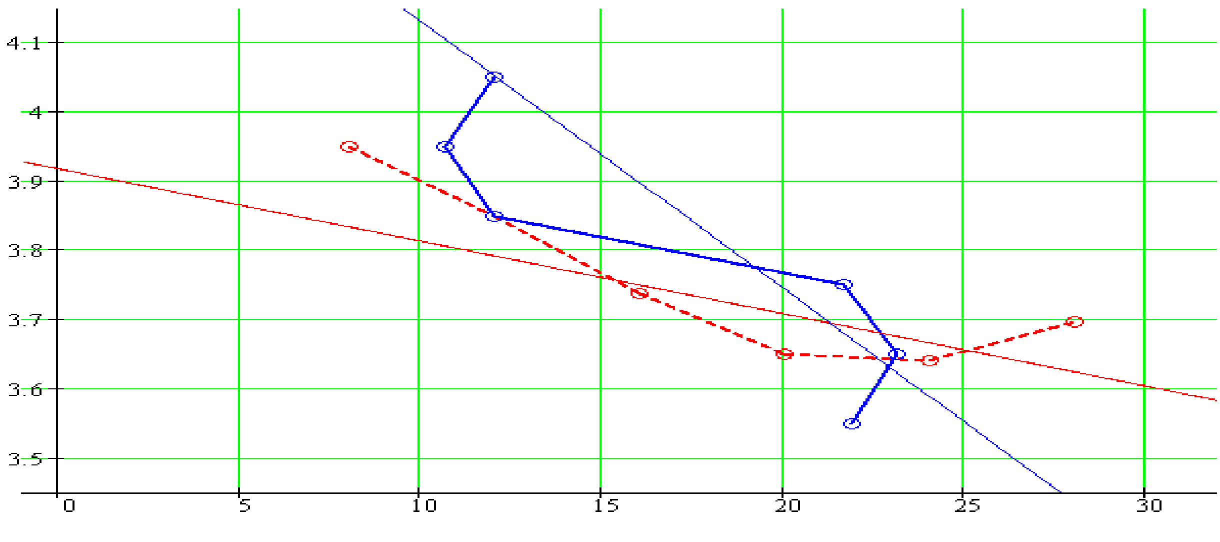
1. Групповые средние $\bar{x}_j$: $\bar{x}_1=21,85$, $\bar{x}_2=23,1$, $\bar{x}_3=21,63$, $\bar{x}_4=12$, $\bar{x}_5=10,67$, $\bar{x}_6=12$;

групповые средние $\bar{y}_i$: $\bar{y}_1=3,95$, $\bar{y}_2=3,85$, $\bar{y}_3=3,74$, $\bar{y}_4=3,65$, $\bar{y}_5=3,64$, $\bar{y}_6=3,7$.

2. а) уравнения прямых регрессии $y=-0,0105\cdot x+3,918$ и $x=-25,9346\cdot y+117,108$;

б) коэффициент корреляции между процентом жирности Y молока коров и ежедневным надоем X значимо отличается от нуля на уровне значимости α=0,05. Имеет место достаточно тесная обратная корреляционная связь между переменными X и Y;

в) средний процент жирности молока у коров, дающих 30 литров равен 3,6 % .



N – *объем генеральной совокупности*;
M – *число элементов генеральной совокупности, обладающих данным признаком*;
n – *объем выборки*;
m – *число элементов выборки, обладающих данным признаком*;
γ - *доверительная вероятность* (надежность);
Δ - *предельная ошибка выборки* (точность).

Оценка генеральной средней

$\bar{x}$ -*выборочная средняя*; $\bar{x}_0$ - *генеральная средняя*.

Теорема. *Вероятность того, что отклонение выборочной средней от генеральной средней не превосходит числа* Δ>0 (по абсолютной величине), *равна*

$$P\left(\left|\ \bar{x}-\bar{x}_0\ \right|\le\Delta\right)=\Phi(t)=\gamma$$

(*формула доверительной вероятности при оценке средней*).

	Повторная выборка	Бесповторная выборка
	$t=\dfrac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}$	$t=\dfrac{\Delta}{\sigma'_{\bar{x}}}$
Дисперсия	$\sigma_{\bar{x}}^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$	$\sigma_{\bar{x}}^{'2}=\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\approx\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$
Средняя квадратическая ошибка	$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}\approx\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}$	$\sigma'_{\bar{x}}\approx\sqrt{\dfrac{s^2}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}$
Объем выборки	$n=\dfrac{t^2\sigma^2}{\Delta^2},\quad n\approx\dfrac{t^2s^2}{\Delta^2}$	$n'=\dfrac{Nt^2\sigma^2}{t^2\sigma^2+N\Delta^2},\quad n'\approx\dfrac{N\cdot t^2s^2}{t^2s^2+N\Delta^2}$

Для определения объема выборки необходимо знать дисперсию генеральной совокупности σ^2, которая неизвестна. Обычно, с целью определения σ^2, проводят выборочное наблюдение (или используют данные предыдущего аналогичного исследования) и полагают, что $s^2\approx\sigma^2$.

Оценка генеральной доли признака

$w=\dfrac{m}{n}$ - *выборочная доля*; $p=\dfrac{M}{N}$ - *генеральная доля*.

Теорема. *Вероятность того, что отклонение выборочной доли от генеральной доли не превосходит числа* Δ>0 (по абсолютной величине), *равна*

$$P\left(\left|\ w-p\ \right|\le\Delta\right)=\Phi(t)=\gamma$$

(*формула доверительной вероятности при оценке доли признака*).

	Повторная выборка	Бесповторная выборка
	$t=\dfrac{\Delta}{\sigma_w}$	$t=\dfrac{\Delta}{\sigma'_w}$
Дисперсия	$\sigma_w^2=\dfrac{pq}{n}$	$\sigma_w^{'2}\approx\dfrac{pq}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$
Средняя квадратическая ошибка	$\sigma_w=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\approx\sqrt{\dfrac{w(1-w)}{n}}$	$\sigma'_w\approx\sqrt{\dfrac{w(1-w)}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}$
Объем выборки	$n=\dfrac{t^2pq}{\Delta^2},\quad n\approx\dfrac{t^2w(1-w)}{\Delta^2}$	$n'=\dfrac{Nt^2pq}{t^2pq+N\Delta^2},\quad n'\approx\dfrac{N\cdot t^2w(1-w)}{t^2w(1-w)+N\Delta^2}$

Заметим, что генеральная доля p неизвестна, но при достаточно большом объеме выборки практически достоверно, что $p \approx w$. Более того, если даже выборочная доля w неизвестна, то в качестве pq можно взять его максимально возможное значение 0,25.

Задания контрольных работ

Вариант 1

Задача 1. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, второй- с вероятностью 0,7, а третий- с вероятностью 0,75. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Задача 2. Груз может быть отправлен заказчику самолетом, поездом или автомобилем. Все варианты равновозможны. Вероятность доставки груза к намеченному сроку равна соответственно 0,99, 0,98, 0,9.

1) Найти вероятность доставки груза к намеченному сроку.

2) Известно, что груз был доставлен заказчику в срок. Найти вероятность того, что он был отправлен поездом.

Вариант 2

Задача 1. Вероятность того, что деталь не проверялась ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется от 70 до 100 деталей, не проверенных ОТК.

Задача 2. Баскетболист попадает в корзину с вероятностью 0,7. Составить закон распределения числа попаданий, если выполнено 4 броска. Построить график функции распределения этой случайной величины.

Вариант 3

Задача 1. Среднее значение длины детали равно 50 см. Пользуясь леммой Чебышева (неравенством Маркова), оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине: а) более 49,5 см; б) не более 50,5 см.

Задача 2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; при \; x \le 0 \\ \dfrac{1}{8}x^3 \; при \; 0 \prec x \le 2 \\ 1 \; при \; x \succ 2 \end{cases}.$$

Найти:

а) плотность вероятности случайной величины X;

б) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X);

в) вероятность $P(0 < X < 1)$;

г) построить графики функции распределения и плотности вероятности случайной величины X.

Вариант 4

Задача 1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 120 предприятий из 1000. Результаты обследования роста их валовой продукции приведены в таблице:

Валовая продукция в	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	Итого

отчетном году							
Число предприятий	8	15	35	29	18	15	120

Найти: а) с вероятностью 0,874 границы для среднего процента роста валовой продукции всех предприятий; б) вероятность того, что выборочная доля предприятий, рост валовой продукции которых составил не менее 50%, отличается от доли таких предприятий в генеральной совокупности, не более чем на 0,1 (по абсолютной величине); объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего процента роста валовой продукции (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

Задача 2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – валовая продукция - распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

Вариант 5

Задача 1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 120 предприятий из 1000. Результаты обследования роста их валовой продукции приведены в таблице:

Валовая продукция в отчетном году	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	Итого
Число предприятий	8	15	35	29	18	15	120

Найти: а) с вероятностью 0,874 границы для среднего процента роста валовой продукции всех предприятий; б) вероятность того, что выборочная средняя предприятий, рост валовой продукции которых составил не менее 50%, отличается от средней таких предприятий в генеральной совокупности, не более чем на 0,1 (по абсолютной величине); объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего процента роста валовой продукции (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

Задача 2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – валовая продукция - распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

Вопросы к экзамену

1. Классификация случайных событий. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности события, непосредственный подсчет вероятности. Примеры.
2. Понятие двумерной (n-мерной) случайной величины. Примеры. Таблица ее распределения. Одномерные распределения ее составляющих. Условные распределения и их нахождение по таблице распределения.
3. Статистическое определение вероятности события и условия его применимости. Пример.
4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Связь между некоррелированностью и независимостью случайных величин.
5. Несовместные и совместные события. Сумма событий. Теорема сложения вероятностей (с доказательством). Пример.
6. Понятие о двумерном нормальном законе распределения. Условные математические ожидания и дисперсии.
7. Полная группа событий. Противоположные события. Соотношение между вероятностями противоположных событий (с выводом). Примеры.
8. Неравенство Маркова (лемма Чебышева) (с выводом). Пример.
9. Зависимые и независимые события. Произведение событий. Понятие условной вероятности. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.
10. Неравенство Чебышева (с выводом) и его частные случаи для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, и для частности события.
11. Формулы полной вероятности и Байеса (с доказательством). Примеры.
12. Неравенство Чебышева для средней арифметической случайных величин (с выводом).
13. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли (с выводом). Примеры.
14. Теорема Чебышева (с доказательством), ее значение и следствие. Пример.
15. Локальная теорема Муавра—Лапласа, условия ее применимости. Свойства функции $f(x)$. Пример.
16. Закон больших чисел. Теорема Бернулли (с доказательством) и ее значение. Пример.
17. Асимптотическая формула Пуассона и условия ее применимости.
18. Вариационный ряд, его разновидности. Средняя арифметическая и дисперсия ряда. Упрощенный способ их расчета.
19. Интегральная теорема Муавра—Лапласа и условия ее применимости. Функция Лапласа $\Phi(x)$ и ее свойства. Пример.
20. Генеральная и выборочная совокупности. Принцип образования выборки. Собственно-случайная выборка с повторным и бесповторным отбором членов. Репрезентативная выборка. Основная задача выборочного метода.
21. Следствия из интегральной теоремы Муавра—Лапласа (с выводом). Примеры.
22. Понятие об оценке параметров генеральной совокупности. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность.
23. Понятие случайной величины и ее описание. Дискретная случайная величина и ее закон (ряд) распределения. Независимые случайные величины. Примеры.
24. Оценка генеральной доли по собственно-случайной выборке. Несмещенность и состоятельность выборочной доли.
25. Математические операции над дискретными случайными величинами и примеры Построения законов распределения для kX, X^2 , $X+Y$, XY по заданным распределениям независимых случайных величин X и Y.
26. Оценка генеральной средней по собственно-случайной выборке. Несмещенность и состоятельность выборочной средней.
27. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства (с выводом). Примеры.
28. Оценка генеральной дисперсии по собственно-случайной выборке. Смещенность и состоятельность выборочной дисперсии (без вывода). Исправленная выборочная дисперсия.

29. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства (с выводом). Примеры.
30. Понятие об интервальном оценивании. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Предельная ошибка выборки. Ошибки репрезентативности выборки (случайные и систематические).
31. Математическое ожидание и дисперсия числа и частости наступлений события в n повторных независимых испытаниях (с выводом).
32. Формула доверительной вероятности при оценке генеральной доли признака. Средняя квадратическая ошибка повторной и бесповторной выборок и построение доверительного интервала для генеральной доли признака.
33. Случайная величина, распределенная по биномиальному закону, ее математическое ожидание и дисперсия. Закон распределения Пуассона.
34. Формула доверительной вероятности при оценке генеральной средней. Средняя квадратическая ошибка повторной и бесповторной выборок и построение доверительного интервала для генеральной средней.
35. Функция распределения случайной величины, ее определение, свойства и график.
36. Определение необходимого объема повторной и бесповторной выборок при оценке генеральной средней и доли.
37. Непрерывная случайная величина (НСВ). Вероятность отдельно взятого значения НСВ. Математическое ожидание и дисперсия НСВ.
38. Статистическая гипотеза и статистический критерий. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность критерия. Принцип практической уверенности.
39. Плотность вероятности непрерывной случайной величины, ее определение, свойства и график.
40. Построение теоретического закона распределения по опытным данным. Понятие о критериях согласия.
41. Определение нормального закона распределения. Теоретико-вероятностный смысл его параметров. Нормальная кривая и зависимость ее положения и формы от параметров.
42. Критерий согласия χ^2 - Пирсона и схема его применения.
43. Функция распределения нормально распределенной случайной величины и ее выражение через функцию Лапласа.
44. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Различия между ними. Основные задачи теории корреляции.
45. Формулы для определения вероятности: а) попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал; б) ее отклонения от математического ожидания. Правило трех сигм.
46. Линейная парная регрессия. Система нормальных уравнений для определения параметров прямых регрессии. Выборочная ковариация. Формулы для расчета коэффициентов регрессии.
47. Центральная предельная теорема. Понятие о теореме Ляпунова и ее значение. Пример.
48. Оценка тесноты связи. Коэффициент корреляции (выборочный), его свойства и оценка достоверности.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Требования к выполнению тестовых заданий:

При выполнении тестовых заданий с выбором одного (нескольких) ответа (-ов) в закрытой форме необходимо выбрать один (несколько) правильный (-ых) ответ (-ов) из предложенных вариантов.

При выполнении тестовых заданий в открытой форме необходимо указать единственно правильный ответ.

При выполнении тестовых заданий на установление правильной последовательности в закрытой форме необходимо установить правильную последовательность в полном объеме предложенных вариантов.

Требования к докладу:

Структура выступления: 1) вступительное слово; 2) основные положения, выносимые на рассмотрение; 3) изложение материала, разбитое на вопросы и подвопросы (пункты, подпункты) с необходимыми ссылками на источники, использованные автором; 5) выводы; 6) список использованных источников.

Требования к экзамену

Текущий контроль успеваемости предназначен для проверки хода и качества усвоения учебного материала, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики проведения занятий. Он может проводиться в ходе проведения всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей учебной программой дисциплины.

Результаты текущего контроля успеваемости не заносятся в зачетную книжку студента и используются преподавателем при оценке знаний в ходе проведения промежуточной аттестации.

В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в Автономной некоммерческой организации высшего образования «Институт экономики и управления» результаты текущего контроля успеваемости студента оцениваются преподавателем в размере до 40 баллов.

Оценка текущего контроля успеваемости

№ п/п	Вид контроля	Количество баллов
1.	Активная работа на практических занятиях (ответы по вопросам семинара, выполнение практических заданий)	до 20
2.	Выполнение контрольной работы	до 20
	Всего	до 40

Промежуточная аттестация имеет целью определить степень достижения учебных целей по дисциплине и проводится в форме экзамена.

В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в Автономной некоммерческой организации высшего образования «Институт экономики и управления» результаты промежуточной аттестации оцениваются преподавателем в размере до 30 баллов.

Итоговый результат промежуточной аттестации оценивается преподавателем в размере до 100 баллов, в том числе:

70 баллов – как результат текущей аттестации;

30 баллов – как результат промежуточной аттестации.

Знания, умения и навыки студентов определяются следующими оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Соответствие баллов традиционной системе оценки при проведении промежуточной аттестации представлено в таблице.

Итоговая оценка промежуточной аттестации

№ п/п	Оценки	Количество баллов
Экзамен		
1.	Отлично	81 – 100

№ п/п	Оценки	Количество баллов
2.	Хорошо	61 – 80
3.	Удовлетворительно	41 – 60
4.	Неудовлетворительно	менее 41

Критерии оценивания компетенций формируются на основе балльно-рейтинговой системы с помощью всего комплекса методических материалов, определяющих процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих данный этап формирования компетенций.

Оценка «отлично» предполагает наличие глубоких исчерпывающих знаний по всему курсу. Студент должен не только понимать сущность исследуемых понятий, но выстраивать взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. В процессе семинарских занятий и экзамена, должны быть даны логически связанные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все поставленные вопросы. При этом студент должен активно использовать в ответах на вопросы материалы рекомендованной литературы.

Оценка «хорошо» свидетельствует о твердых и достаточно полных знаниях всего материала курса, понимание сути и взаимосвязей между рассматриваемых процессов и явлений. Последовательные, правильные, конкретные ответы на основные вопросы. Использование в ответах отдельных материалов рекомендованной литературы.

Оценка «удовлетворительно» - знание и понимание основных вопросов программы. Правильные и конкретные, без грубых ошибок ответы на основную часть вопросов экзамена. Наличие отдельных ошибок в обосновании ответов. Некоторое использование в ответах на вопросы материалов рекомендованной литературы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.